Exercício 1:

Dado o par de primos p e $8p^2 + 1$, encontre p.
(*Dica*: Analise os possíveis restos da divisão euclidiana de p por 3).

Dividindo p por 3, obtém-se $p = 3q + r$, sendo q e r inteiros, com $r \in \{0, 1, 2\}$. Se $r = 0$, então $p = 3q$ e, portanto, 3 é divisor de p. Como p é primo, então $p = 3$ e, logo, $8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$, que também é primo. Se $r = 1$, então $p = 3q + 1$ e, logo, $8p^2 + 1 = 8 \cdot (3q + 1)^2 + 1 = 3 \cdot (24q^2 + 16q + 3)$ é divisível por 3. Como $8p^2 + 1$ é primo e divisível por 3, então $8p^2 + 1 = 3$ e, logo, $4p^2 = 1$, o que não é possível, pois $4p^2$ é par e 1 é ímpar. Assim, r não pode ser igual a 1. Se $r = 2$, então $p = 3q + 2$ e, logo, $8p^2 + 1 = 8 \cdot (3q + 2)^2 + 1 = 3 \cdot (24q^2 + 32q + 11)$ é divisível por 3, o que não é possível, conforme explicado anteriormente. Assim, r não pode ser igual a 2. Assim, a única possibilidade é mesmo $p = 3$, sendo $8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$.

Exercício 2:

Joana comprou 130 salgadinhos de presunto e 540 quibes para levar a uma festa. Na lanchonete, um dos funcionários decidiu embalar os salgadinhos sem misturá-los. Cada embalagem tinha a mesma quantidade de salgadinhos e, para economizar, o funcionário usou a menor quantidade de embalagens.

a) Quantos salgadinhos havia em cada embalagem?
b) Com quantas embalagens Joana chegou à festa?

a) Sejam n a quantidade de salgadinhos em cada embalagem, m a quantidade de embalagens com salgadinhos de presunto e k a quantidade de embalagens com quibes. Então, $nm = 130$ e $nk = 540$ e, portanto, n é divisor de 540 e 130. Como foi usada a menor quantidade possível de embalagens, então n deve ser o maior divisor comum de 130 e 540, ou seja, $n = \text{mdc}(540, 130)$. Como as fatorações em números primos de 540 e 130 são $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ e $130 = 2 \times 5 \times 13$, então $n = \text{mdc}(540, 130) = 2 \times 5 = 10$.
b) Joana chegou à festa com $\frac{130}{10} = 13$ embalagens de salgadinhos de presunto e $\frac{540}{10} = 54$ embalagens de quibes, resultando em um total de $13 + 54 = 67$ embalagens.

Exercício 3:

Em 1982 ocorreu uma conjunção entre os planetas Júpiter e Saturno, o que significa que podiam ser vistos bem próximos um do outro quando avistados da Terra. Se Júpiter e Saturno dão uma volta completa ao redor do Sol aproximadamente a cada 12 e 30 anos, respectivamente, em qual dos anos seguintes ambos estiveram em conjunção no céu da Terra?

a) 1840
b) 1852
c) 1864
d) 1922
e) 1960

Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra quando $1982 + 12k = 1982 + 30j$, ou seja, $12k = 30j$, sendo k e j inteiros. Mas, $12k = 30j$, com k e j inteiros, quando $12k = 30j$ é múltiplo de 12 e 30, sendo que o menor múltiplo comum positivo de 12 e 30 é igual a $\text{mmc}(12,30)$. Como as fatorações em primos de 12 e 30 são $12 = 2^2 \times 3$ e $30 = 2 \times 3 \times 5$, então $\text{mmc}(12,30) = 2^2 \times 3 \times$

$5 = 60$. Logo, os anos em que Júpiter e Saturno estão em conjunção no céu da Terra são $1982 + 60n$, sendo n inteiro. Para $n = -1$, tem-se $1982 + 60 \cdot (-1) = 1922$, que, portanto, é um ano de conjunção, apresentado na alternativa (d). A diferença entre cada um dos anos apresentados nas demais alternativas e 1982 não é um múltiplo de 60 e, logo, os anos apresentados nas demais alternativas não são anos de conjunção.

Exercício 4:

A soma de dois números primos positivos a e b é 34 e a soma dos números primos positivos a e c é 33. Qual é o valor de $a + b + c$?

Como $a + b = 34$ e $a + c = 33$, então $b - c = (a + b) - (a + c) = 34 - 33 = 1$. Como $b - c = 1$, então b e c são números primos positivos consecutivos. Mas, o único par de primos positivos consecutivos é $(2, 3)$. De fato, dados dois inteiros consecutivos p e $p + 1$, um deles é par. Se p for par e primo positivo, então $p = 2$ e, logo, $p + 1 = 3$, que é primo. Se $p + 1$ for par e primo positivo, então $p + 1 = 2$ e, logo, $p = 1$, que não é primo. Assim, $b = 3$ e $c = 2$, e, portanto, $a = 31$. Logo, $a + b + c = 31 + 3 + 2 = 36$.

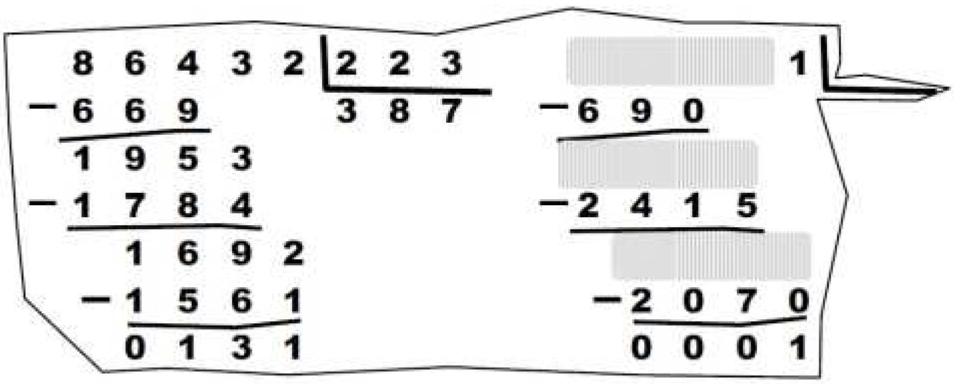
Exercício 5:

Senhor Namm assou 252 biscoitos, senhora Clancy assou 105 biscoitos e senhor Palavras assou 168 biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

Denotando por n a quantidade de biscoitos em cada pacote, por x a quantidade de pacotes usados pelo senhor Namm, por y a quantidade de pacotes usados pela senhora Clancy e por z a quantidade de pacotes usados pelo senhor Palavras, tem-se $nx = 252$, $ny = 105$ e $nz = 168$. Assim, n é divisor de 252, 105 e 168. O maior valor possível para n é igual ao $\mathrm{mdc}(252, 105, 168)$. As fatorações em primos de 252, 105 e 168 são $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, $105 = 3 \times 5 \times 7$ e $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. Logo, $\mathrm{mdc}(252, 105, 168) = 3 \times 7 = 21$.

Exercício 6:

Esmeralda fez a lição de casa, mas o cachorro dela, Totopázio, rasgou a folha que ela deveria entregar. A lição de casa de Esmeralda pedia para dividir números de cinco algarismos por números de três algarismos. Um dos pedaços rasgados está exibido abaixo, com algumas partes borradas.

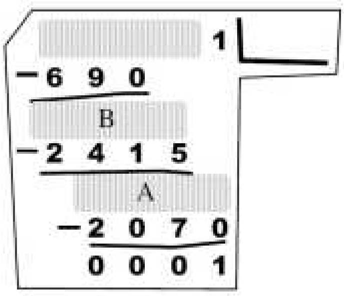


a) Calcule $\mathrm{mdc}(690, 2415, 2070)$.

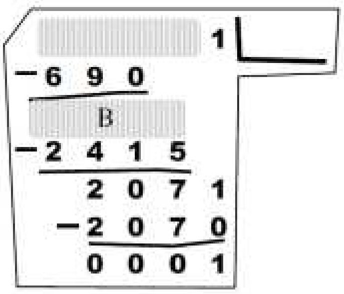
b) Sabendo que Esmeralda acertou as divisões, determine o dividendo e o divisor da conta da direita.

a) Como as fatorações em primos de 690, 2415 e 2070 são $690 = 2 \times 3 \times 5 \times 23$, $2415 = 3 \times 5 \times 7 \times 23$ e $2070 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 23$, então $\mathrm{mdc}(690, 2415, 2070) = 3 \times 5 \times 23 = 345$.

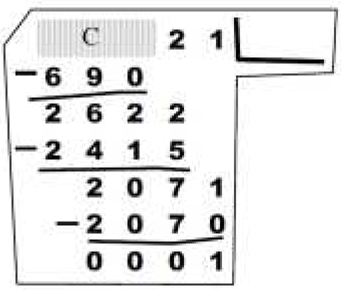
b) Vamos encontrar inicialmente os números A e B, e parte do dividendo, fazendo o processo inverso.

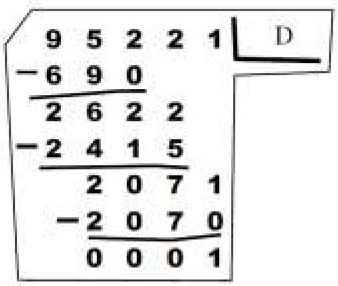


O número A é $2070 + 1 = 2071$.



O número B é $2415 + 207 = 2622$ e, assim, descobrimos o algarismo das dezenas do dividendo, que é 2. Finalmente, o número C é $690 + 262 = 952$ e, portanto, o dividendo é 95221.





Vamos agora encontrar D, o divisor. Como D é divisor de 690, 2415 e 2070, então D é um dos divisores positivos de $\mathrm{mdc}(690, 2415, 2070) = 345$, ou seja, pode ser $1, 3, 5, 15, 23, 69, 115$ ou 345. Veja que o primeiro passo é dividir 952 por D e obter resto 262. Como o resto é sempre menor do que o divisor, então D não pode ser nenhum dos números $1, 3, 5, 15, 23, 69$ e 115. Logo, D só pode ser igual a 345.

Exercício 7 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):
Quantos são os números inteiros p tais que $50^3 < 5^p < 50^4$?

A decomposição de 50 em fatores primos é $50 = 2 \times 5^2$. Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como $(2 \times 5^2)^3 < 5^p < (2 \times 5^2)^4$, ou seja, $2^3 \times 5^6 < 5^p < 2^4 \times 5^8$. Dividindo todos os termos por 5^6, obtemos $2^3 < 5^{p-6} < 2^4 \times 5^2$, ou seja, $8 < 5^{p-6} < 400$. As únicas potências de 5 que estão entre 8 e 400 são $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$. Logo, $p - 6$ só pode assumir os valores 2 e 3, donde p só pode assumir os valores 8 e 9.

Exercício 8 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):
O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n?

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, tem-se $n \geq 13$. Por outro lado, $13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}$ e, portanto, $\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16$. Logo, $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$ e, portanto, $n = 16$.

Exercício 9 (Questão 18 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):
Três amigas foram a uma livraria com seus namorados. Coincidentemente, cada pessoa pagou, por livro, um preço em reais igual à quantidade de livros que comprou. Além disso, cada mulher gastou 32 reais a mais que seu respectivo namorado. Ao final das compras, as mulheres compraram, ao todo, oito livros a mais que os homens. Quantos livros foram comprados no total?

Os dados do problema estão organizados na tabela abaixo:

Pessoa	Quantidade de livros que comprou	Preço por cada livro	Quanto a pessoa gastou
Amiga 1	a_1	a_1	a_1^2
Amiga 2	a_2	a_2	a_2^2
Amiga 3	a_3	a_3	a_3^2
Namorado da amiga 1	n_1	n_1	$n_1^2 = a_1^2 - 32$
Namorado da amiga 2	n_2	n_2	$n_2^2 = a_2^2 - 32$
Namorado da amiga 3	n_3	n_3	$n_3^2 = a_3^2 - 32$

Como $n_i^2 = a_i^2 - 32$, $i = 1, 2, 3$, então $(a_i - n_i)(a_i + n_i) = 32 = 2^5$. Cada uma das parcelas do membro direito da última igualdade é um número inteiro positivo e, portanto, há apenas duas soluções $(a_i = 9, n_i = 7)$ e $(a_i = 6, n_i = 2)$, devido à decomposição única em fatores primos. Na primeira solução, a mulher comprou dois livros a mais do que o seu namorado e na segunda ela comprou 4 livros a mais do que o namorado. Como as mulheres compraram oito livros a mais do que os homens, só resta a possibilidade de um casal ter comprado $6 + 2 = 8$ livros e os outros dois casais terem comprado, cada um deles $9 + 7 = 16$ livros. Desse modo, a quantidade total de livros comprada foi $8 + 16 + 16 = 40$.

Exercício 10 (Questão 15 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $\frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam todos números inteiros?

Para que $\frac{N}{3}, \frac{N}{4}, \frac{N}{5}, \frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser um múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o mínimo múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7, que é $3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$.

Exercício 11 (Questão 83 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Quais números naturais m e n satisfazem a equação $2^n + 1 = m^2$?

Como $2^n = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$, pela unicidade da fatoração em números primos, segue que $m-1$ e $m+1$ são potências de 2. Como a diferença de $m+1$ e $m-1$ é igual a 2, a única solução possível é $m-1=2$ e $m+1=2^2$, donde $m=3$. Assim, $2^n+1=3^2=9$ e obtemos $n=3$. A resposta é $m=n=3$.

Exercício 12 (Questão 4 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2017):
Neste problema, iremos estudar quantos fatores 2 aparecem na fatoração em primos de números da forma $5^{2^n} - 1$.

a) Sejam x e y dois números inteiros ímpares. Prove que $x^2 + y^2$ possui exatamente um fator 2 em sua fatoração em primos.
b) Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, determine quantos fatores 2 o número $5^4 - 1$ possui.
c) O número $N = 5^{2^{2017}} - 1$ possui quantos fatores 2?
d) Sabendo que o número 5^{20} possui 14 algarismos, prove que $5^{2^{18}+20}$ possui 6 zeros consecutivos em sua representação decimal.

a) Como x e y são ímpares, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $x = 2x_0 + 1$ e $y = 2y_0 + 1$. Daí, $x^2 + y^2 = (2x_0+1)^2 + (2y_0+1)^2 = 4x_0^2 + 4x_0 + 1 + 4y_0^2 + 4y_0 + 1 = 4x_0^2 + 4x_0 + 4y_0^2 + 4y_0 + 2 = 2(2x_0^2 + 2x_0 + 2y_0^2 + 2y_0 + 1) = 2(2(x_0^2 + x_0 + y_0^2 + y_0) + 1)$. Assim, o número $x^2 + y^2$ é o produto de 2 por um número ímpar e, portanto, possui apenas um fator 2.
b) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados duas vezes. Temos $5^4 - 1 = (5^2)^2 - 1^2 = (5^2+1)(5^2-1) = (5^2+1^2)(5^2-1^2) = (5^2+1^2)(5+1)(5-1)$. Agora, basta contar os fatores 2 em cada fator. Pelo item anterior, $5^2 + 1^2$ possui apenas um fator 2. Além disso, $5+1 = 6 = 2 \cdot 3$ possui apenas um fator 2 e $5 - 1 = 4 = 2^2$ possui dois fatores 2. Logo, $5^4 - 1$ possui $1+1+2 = 4$ fatores 2.
c) Vamos usar a fatoração da diferença de quadrados 2017 vezes. Temos $5^{2^{2017}} - 1 = \left(5^{2^{2016}}\right)^2 - 1^2 = \left(5^{2^{2016}} + 1\right)\left(5^{2^{2016}} - 1\right) = \left(5^{2^{2016}} + 1^2\right)\left(5^{2^{2015}} + 1\right)\left(5^{2^{2015}} - 1\right) = \cdots = \left(5^{2^{2016}} + 1^2\right)\left(5^{2^{2015}} + 1^2\right) \ldots (5^2 + 1^2)(5+1)(5-1)$. Temos 2016 números da forma $x^2 + y^2$, com x e y ímpares, e cada um contribui com apenas um fator 2, de acordo com o item (a). Além disso, $5 + 1 = 6$ tem apenas um fator 2 e $5 - 1 = 4$ tem dois fatores 2. Assim, o número $N = 5^{2^{2017}} - 1$ possui exatamente $2016 \cdot 1 + 1 + 2 = 2019$ fatores 2.
Observação: Repetindo o argumento anterior, é possível mostrar que $5^{2^n} - 1$ possui exatamente $n + 2$ fatores primos 2.

d) Pelo argumento do item anterior, existe um inteiro k tal que $5^{2^{18}} - 1 = 2^{20}k$. Consequentemente, $5^{2^{18}+20} = (2^{20}k + 1) \cdot 5^{20} = (2 \cdot 5)^{20}k + 5^{20} = 10^{20}k + 5^{20}$. Como 10^{20} termina em 20 zeros e 5^{20} possui apenas 14 dígitos, então existem pelo menos $20 - 14 = 6$ dígitos iguais a zero consecutivos dentre os últimos dígitos da representação decimal de $5^{2^{18}+20}$.