Tarefa de casa 1 (Prova OBMEP 2007 – 2ª Fase – N3 – Questão 4)

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a sequência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura	par $\xrightarrow{\text{1ª jogada}}$	Fernando	Isaura	ímpar $\xrightarrow{\text{2ª jogada}}$	Fernando	Isaura	par $\xrightarrow{\text{3ª jogada}}$	Fernando	Isaura	
128	128		64	192		160	96		80	176	...

a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Fernando	Isaura	ímpar $\xrightarrow{\text{1ª jogada}}$	Fernando	Isaura	ímpar $\xrightarrow{\text{2ª jogada}}$	Fernando	Isaura	par $\xrightarrow{\text{3ª jogada}}$	Fernando	Isaura	
128	128										...

b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?
c) Qual foi a sequência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?
d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos e, como o número total de palitos é 256, segue que Fernando ficou com $256 - 64 = 192$ palitos. Do mesmo modo, após a segunda jogada, Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256 - 32 = 224$ palitos. Na terceira jogada, saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256 - 112 = 144$ palitos.

Fernando	Isaura	ímpar $\xrightarrow{\text{1ª jogada}}$	Fernando	Isaura	ímpar $\xrightarrow{\text{2ª jogada}}$	Fernando	Isaura	par $\xrightarrow{\text{3ª jogada}}$	Fernando	Isaura	
128	128		192	64		224	32		112	144	...

b) *1ª solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos. De fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2 \times 128 = 256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá, então, no mínimo $256 - 127 = 129$ palitos. Logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2ª solução: Suponhamos que, em um dado momento, Fernando tem x palitos e Isaura tem y. Notamos que, como $x + y = 256$, que é um número par, então x e y têm a mesma paridade, ou seja, são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e, depois da jogada seguinte, podem acontecer as seguintes situações:

- saiu **par**: nesse caso, Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y + \frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;
- saiu **ímpar**: nesse caso, Fernando fica com $x + \frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256 - 101 = 155$ palitos. Logo, o resultado da última jogada foi **par**.

c) Aplicamos o raciocínio do item (b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **par**. Então, Fernando tinha $2 \times 101 = 202$ palitos e Isaura tinha $256 - 202 = 54$ palitos.

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **ímpar**. Então, Isaura tinha $2 \times 54 = 108$ palitos e Fernando tinha $256 - 108 = 148$ palitos.

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **ímpar**. Então, Isaura tinha $2 \times 108 = 216$ palitos e Fernando tinha $256 - 216 = 40$ palitos.

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **par**. Então, Fernando tinha $2 \times 40 = 80$ palitos e Isaura tinha $256 - 80 = 176$ palitos.

Fernando	Isaura
80	176

Isaura tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **par**. Então, Fernando tinha $2 \times 80 = 160$ palitos e Isaura tinha $256 - 160 = 96$ palitos.

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **ímpar**. Então, Isaura tinha $2 \times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos.

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos e, logo, na jogada anterior saiu **par**. Então, Fernando tinha $2 \times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo, a sequência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, par.

d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128=2^7\times 1$	$64=2^6\times 1$	$160=2^5\times 5$	$80=2^4\times 5$	$40=2^3\times 5$	$148=2^2\times 37$	$202=2^1\times 101$	$101=2^0\times 101$
Isaura	$128=2^7\times 1$	$192=2^6\times 3$	$96=2^5\times 3$	$176=2^4\times 11$	$216=2^3\times 27$	$108=2^2\times 27$	$54=2^1\times 27$	$155=2^0\times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, sendo a e b inteiros ímpares. Além disso, se o jogo nãoacabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, sendo a' e b' também inteiros ímpares.
Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que, em alguma etapa de uma partida, Fernando e Isaura têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, sendo a e b inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair **par**, então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a+2b)$ palitos. Como a é ímpar, então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, sendo a e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair **ímpar**, e acabamos de provar nossa afirmativa.
O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.

<u>**Tarefa de casa 2**</u> **(Prova OBMEP 2017 – 2ª Fase – N3 – Questão 1)**
Júlia faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número. Assim, com o número 2, o resultado do cálculo é $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$.

a) Qual é o resultado do cálculo de Júlia com o número 3?
b) Qual é o número que deve ser escolhido por Júlia para que o resultado do cálculo seja 1320?
c) Explique por que, para qualquer número que Júlia escolher, o resultado final do cálculo será sempre um múltiplo de 6.

a) O resultado de Júlia com o número 3 é $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$.

b) Temos que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = 1320$. Isto nos diz que o produto de três números consecutivos é igual a 1320. Usando cálculos mentais, por aproximação, como $10^3 = 1000$ e como o algarismo das unidades do número 1320 é zero, testamos $n = 11$. Nesse caso, como $11 \times 10 \times 12 = 1320$, concluímos que, de fato, $n = 11$ deve ter sido o número escolhido por Júlia para que ela tenha obtido 1320 como resultado. Observe que outro teste natural seria $14 \times 13 \times 15$, que também tem algarismo das unidades igual a zero, mas o resultado é maior do que 1320.

c) Um número inteiro é múltiplo de 6 se, e somente se, ele é múltiplo de 2 e de 3. De fato, se um número inteiro é múltiplo de 6, então ele é múltiplo de 2 e de 3, já que $6 = 2 \times 3$ é múltiplo de 2 e de 3. Reciprocamente, se a é um inteiro múltiplo de 2 e de 3, então a é múltiplo de 6, pois se a não fosse múltiplo de 6, então o resto da divisão de a por 6 seria $r \in \{1,2,3,4,5\}$, ou seja, existiriam inteiros q e r, com $r \in \{1,2,3,4,5\}$, tais que $a = 6q + r$. Se $r \in \{1,2,4,5\}$, então r não é múltiplo de 3, o que não é possível, uma vez que, como $a = 6q + r$ e 6 são múltiplos de 3, deveria ocorrer de

r ser múltiplo de 3. Se $r = 3$, então r não é múltiplo de 2, o que não é possível, uma vez que, como $a = 6q + r$ e 6 são múltiplos de 2, deveria ocorrer de r ser múltiplo de 2. Em qualquer caso, não pode ocorrer de a não ser múltiplo de 6, ou seja, a é múltiplo de 6. Como vimos no item (b), o resultado é o produto de três números inteiros positivos consecutivos. Como dentre os três números consecutivos pelo menos um deles é par, temos que o resultado é par. Para mostrar que o número encontrado é múltiplo de 3, basta verificar que um dos três números, n, $n-1$ ou $n+1$, é múltiplo de 3. De fato, dividindo n por 3, obtém-se $n = 3q + r$, sendo q e r inteiros, com $r \in \{0, 1, 2\}$. Se $r = 0$, então $n = 3q$ é múltiplo de 3. Se $r = 1$, então $n - 1 = (3q + 1) - 1 = 3q$ é múltiplo de 3. Se $r = 2$, então $n + 1 = (3q + 2) + 1 = 3(q + 1)$ é múltiplo de 3. Em qualquer um desses casos, o resultado de Júlia, isto é, $n(n-1)(n+1)$, será sempre um múltiplo de 2 e de 3 e, portanto, será um múltiplo de 6.

Tarefa de casa 3 **(Problema 16.10 – Círculos de Matemática da OBMEP):** No encarte do álbum *Presence* do grupo musical *Led Zeppelin*, uma ilustração mostra parte de uma multiplicação, na qual os números multiplicados e o resultado não aparecem. Todavia, as parcelas que aparecem quando se multiplica cada dígito de um número pelo outro número são visíveis:

$$\begin{array}{r} ????\\ \times\ ???\\ \hline 33240\\ 77240\ \ \\ 25080\ \ \ \ \\ \hline ??????? \end{array}$$

Utilize uma calculadora nesse problema.

a) Calcule o $mdc(25080{,}77240)$.
b) Mostre que a conta acima está incorreta, ou seja, que as parcelas acima não podem ser o produto de dígitos por um mesmo número.
c) Trocando o dígito da ordem das centenas da parcela 33240 e o dígito da ordem das unidades de milhar da parcela de 77240, é possível conseguir parcelas que podem ser obtidas em uma multiplicação. Descubra os números que estavam sendo multiplicados.

a) Temos $mdc(77240{,}25080) = mdc(25080{,}77240 - 3 \times 25080) = mdc(25080{,}2000)$. Daí $mdc(25080{,}2000) = mdc(2000{,}25080 - 12 \times 2000) = mdc(2000{,}1080)$. Assim, $mdc(2000{,}1080) = mdc(1080{,}2000 - 1080) = mdc(1080{,}920) = mdc(920{,}1080 - 920) = mdc(920{,}160) = mdc(160{,}920 - 5 \times 160) = mdc(160{,}120) = 40$. Isto é $mdc(77240{,}25080) = 40$.
b) Observe que 77240 e 25080 devem ser resultados do produto de um dos fatores da multiplicação por algarismos. Logo, o fator multiplicado deve ser um divisor comum de 77240 e 25080, sendo assim o divisor de $mdc(77240{,}25080) = 40$. Mas nesse caso os algarismos devem ser pelo menos iguais a $77240/40$ e $25080/40$, respectivamente, o que é impossível, pois ambos os quocientes são maiores que 10.
Vejamos outra maneira de pensar. O único número de quatro dígitos, que, se multiplicado por um número de apenas um dígito, obtemos 77240 e 9655, mas esse número não é divisível por 25080 nem por 33240, portanto não há como multiplicarmos este número, por outro x, que dê 25080 ou 33240.
c) Como $25080 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 19$, e 25080 deve ser o resultado do produto de um dos fatores da multiplicação por um algarismo. Esse algarismo pode ser 2,3,4,5,6 ou 8. Em cada um desses casos temos $25080 = 2 \times 12540$, $25080 = 3 \times 8360$, $25080 = 4 \times 6370$, $25080 = 5 \times 5016$,

$25080 = 6 \times 4180$, $25080 = 8 \times 3135$. Veja que nenhum dos números $33n40$ é múltiplo de 12540, 6370 ou 5016 e $33n40$ é maior que 10×3135. Além disso, $7n240$ é maior que 10×4180. Logo o único fator possível que resta é 8360. Assim, trocando 33240 por 33440 e 77240 por 75240, a conta fica correta. Como $\text{mdc}(33440,75240,25080) = 8360$ e $\frac{33440}{8360} = 4$, $\frac{75240}{8360} = 9$ e $\frac{25080}{8360} = 3$, os números multiplicados são 8360 e 394.

$$\begin{array}{r}
8360 \\
\times \;\; 394 \\
\hline
33440 \\
75240 \\
25080 \\
\hline
3293840
\end{array}$$