Exercício 1:

Coloque algarismos no lugar dos asteriscos de modo que o número $32*35717*$ seja divisível por 8 e por 9.

Pelo critério de divisibilidade por 8, o número $17*$ tem que ser divisível por 8. É fácil verificar que o único algarismo que funciona é o 6. De acordo, com o critério de divisibilidade por 9, a soma dos algarismos do número $32*357176$ tem que ser divisível por 9. Logo, o último algarismo que faltava é o 2. Assim, o número é 322357176.

Exercício 2:

Foi cortado um buraco quadrado ao longo das retas impressas em um pedaço de papel quadriculado quadrado. O resto do papel quadriculado pode ter exatamente

a) nove quadrados?
b) dez quadrados?

Podemos definir nossa unidade de comprimento como sendo o comprimento do lados dos quadrados do papel quadriculado. Suponha que o lado do quadrado grande (o papel) seja x unidades e que o lado do buraco seja y unidades. Então, a figura que sobrou no papel consiste em $x^2 - y^2$ quadrados do papel quadriculado.

a) Precisamos resolver a equação $x^2 - y^2 = 9$ ou, equivalentemente, $(x+y)(x-y) = 9$. Como x e y são número naturais e $y < x$, temos $x + y = 9$ e $x - y = 1$. Portanto, $x = 5$ e $y = 4$. Assim, é possível ter 9 quadrados sobrando.

b) Precisamos resolver a equação $x^2 - y^2 = 10$ ou, equivalentemente, $(x+y)(x-y) = 10$. Os números $x + y$ e $x - y$ diferem de $2y$ e, logo, têm a mesma paridade. Eles não podem ser ambos ímpares, já que o produto de dois números ímpares é ímpar, e 10 é par. Mas, eles também não podem ser ambos pares, já que o produto de dois número pares é divisível por 4, e 10 não é. Logo, é impossível ter 10 quadrados sobrando.

Exercício 3:

Os números $1, 2, \ldots, 10$ estão escritos no quadro. Dois números quaisquer a e b podem ser apagados e substituídos pelo número a-b. Depois desse processo ser repetido diversas vezes, pode acontecer do único número restante no quadro ser zero?

Note que $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, que é um número ímpar. Ao apagarmos dois números a e b, e substituí-los por $a - b$, a soma de todos os números no quadro não muda de paridade, pois simplesmente, substituímos a e b, que contribuem com o valor $a + b$ para a soma total, por um número $a - b$, diminuindo a soma total por um número par, $2b$. Portanto, independentemente do número de vezes que repetirmos este processo, a soma dos números no quadro permanecerá ímpar, não podendo nunca terminar resultando em zero, ou qualquer outro número par.

Exercício 4:

Calcule o resto da divisão de 2^{10000} por 3.

Tem-se que o quociente e o resto da divisão de $2^2 = 4$ por 3 são ambos iguais a 1 e 1, respectivamente, ou seja, $2^2 = 1 \cdot 3 + 1$. Assim, $2^{10000} = 2^{2 \cdot 5000} = (2^2)^{5000} = (1 \cdot 3 + 1)^{5000} = 3t + 1^{5000} = 3t + 1$, para algum t inteiro. Logo, o resto da divisão de 2^{10000} por 3 é igual a 1.

Exercício 5 (Questão 2 – Lista 5 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2007):
Uma loja distribui 9999 cartões entre os seus clientes. Cada um dos cartões possui um número de 4 algarismos, entre 0001 e 9999 (está se admitindo, por exemplo, que os número 0001 ou 0023 ou 0234 têm 4 algarismos, ou seja, algarismos zero à esquerda são considerados). Se a soma dos primeiros 2 algarismos for igual à soma dos 2 últimos, o cartão é premiado. Por exemplo, o cartão 0743 é premiado. Prove que a soma dos números de todos os cartões premiados é divisível por 101.

Observe que se o cartão $abcd$ é premiado então o cartão $cdab$ também é premiado. Por exemplo, 2341 e 4123 são ambos premiados. Assim, sempre que $ab \neq cd$, temos dois cartões premiados cuja soma é $abcd + cdab = (ab \times 100 + cd) + (cd \times 100 + ab) = 101(ab + cd)$. Assim, a soma desses dois cartões é divisível por 101. No caso em que o cartão é da forma $abab = ab \times 100 + ab = 101 \times ab$, o número do cartão é divisível por 101. Portanto, a soma de todos os cartões é divisível por 101, já que a soma pode ser feita agrupando cartões do tipo $abcd$ com cartões do tipo $cdab$, e a soma de números divisíveis por 101 também é divisível por 101.

Exercício 6 (Questão 1 – Lista 2 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2008):
Quantos zeros existem no final do número $9^{2007} + 1$?

A tabela abaixo mostra como aparecem em ordem, dezena e unidade, os dois últimos algarismos de algumas potências de 9. Observe que esses dois últimos algarismos de 9^0 e 9^{10} são os mesmos. Logo, a partir 9^{10}, a segunda coluna da tabela começará a se repetir, formando uma sequência periódica, de período 10. Como o quociente e o resto da divisão de 2007 por 10 são 200 e 7, respectivamente, ou seja, $2007 = 10 \times 200 + 7$ e os dois últimos algarismos de $9^{10\times 200}$ são 01, então os dois últimos algarismos de 9^{2007} são os dois últimos algarismos de 9^7, ou seja, 69. Portanto, os dois últimos algarismos de $9^{2007} + 1$ são iguais a $69 + 1 = 70$. Assim, existe um único zero no final do número $9^{2007} + 1$.

n	dois últimos algarismos de 9^n
0	01
1	09
2	81
3	29
4	61
5	49
6	41
7	69
8	21
9	89
10	01

Exercício 7 (Questão 20 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2006):
O número $abcde$ tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras a, b, c, d, e. Multiplicando-se este número por 4, obtém-se número de cinco algarismos $edcba$. Qual é o valor de $a + b + c + d + e$?

A multiplicação pode ser esquematizada como

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & a \end{array}$$

A solução é baseada nas seguintes observações:

i. <u>a só pode ser 1 ou 2</u> porque se $a \geq 3$, então $4a$ é um número de 2 algarismos e, portanto, o número $edcba$ teria 6 algarismos. Mas. a não pode ser 1, pois $edcba$, sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo, $a = 2$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & 2 \end{array}$$

ii. <u>e só pode ser 8 ou 9</u> porque $2 \times 4 = 8$ e $edcba$ tem apenas 5 algarismos. No entanto, e não pode ser 9 porque $9 \times 4 = 36$ termina em 6, e não em 2. Logo, $e = 8$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & b & 2 \end{array}$$

iii. <u>b só pode ser 1 ou 2</u> porque $4 \times b$ tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $b = 1$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & 1 & 2 \end{array}$$

iv. <u>d só pode ser 2 ou 7</u> porque $4d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $d = 7$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & c & 1 & 2 \end{array}$$

v. <u>c só pode ser 9</u> porque $4c + 3$ é um número terminado em c.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 9 & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

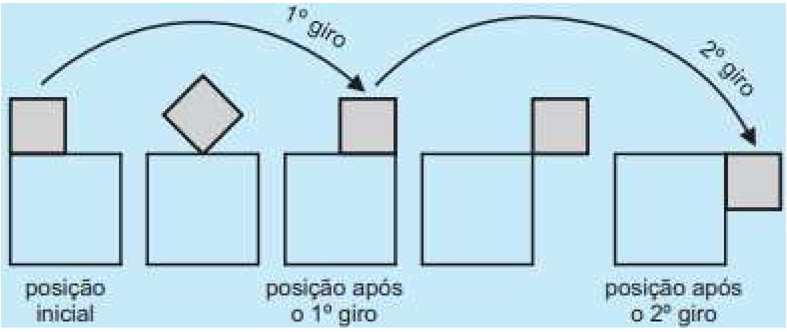
Logo, a resposta é $8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27$.

Exercício 8 (Questão 15 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):
O *contrário* de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é soma de um número de dois algarismos com seu contrário?

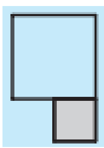
A) 44
B) 99
C) 121
D) 165
E) 181

(Alternativa E) Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o das unidades; então $n = 10a + b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b + a$. Desse modo, a soma de n e seu contrário é $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ e, portanto, a soma de um número com seu contrário é sempre múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções apresentam múltiplos de 11, com a exceção de 181. As outras opções são todas somas de um número com seu contrário; de fato, $44 = 13 + 31$, $99 = 18 + 81$, $121 = 29 + 92$ e $165 = 69 + 96$. Como foram achadas essas expressões? Tomemos, como exemplo, $165 = 11 \times 15$. O raciocínio inicial mostra que se escolhermos algarismos não nulos a e b de modo que sua soma seja 15, então 165 será a soma do número $10a + b$ e de seu contrário. Por exemplo, podemos tomar $a = 6$ e $b = 9$; para essa escolha obtemos a expressão $165 = 87 + 78$. Outras escolhas são possíveis; por exemplo, $a = 8$ e $b = 7$ leva a $165 = 87 + 78$. O mesmo raciocínio serve para as outras alternativas.

Exercício 9 (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2012):
Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura abaixo, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior. Como ficaria a figura que representa a posição dos dois quadrados após o 2012° giro?



Basta verificar que após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial. Como, pela divisão euclidiana $2012 = 8 \times 251 + 4$, após o 2012° giro o quadrado cinza terá dado 251 voltas completas no quadrado maior e mais quatro giros, parando na posição que corresponde à seguinte figura.



Exercício 10 (Questão 8 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):
Marcos fez cinco provas de Matemática. Suas notas, em ordem crescente, foram 75, 80, 84, 86 e 95. Ao digitar as notas de Marcos na ordem em que as provas foram realizadas, o professor notou que as médias das duas primeiras provas, das três primeiras, das quatro primeiras e das cinco provas eram números inteiros. Qual foi a nota que Marcos tirou na última prova?

A tabela abaixo mostra os restos da divisão das notas por 3 e por 4.

	75	80	84	86	95
resto da divisão por 3	0	2	0	2	2
resto da divisão por 4	3	0	0	2	3

Como a média das três primeiras notas é um número inteiro, vemos que a soma das três primeiras notas é um múltiplo de 3. A consulta à tabela mostra que a única maneira de somar três restos na primeira linha de modo a obter um múltiplo de 3 corresponde às notas 80, 86 e 95. Logo, essas foram (não necessariamente nessa ordem) as três primeiras notas. De modo análogo, o fato de que a soma das quatro primeiras notas é um múltiplo de 4 mostra que essas notas devem ser 75, 86, 95 e uma entre 80 ou 84, que correspondem à única maneira possível de somar quatro números da segunda linha e obter um múltiplo de 4. Mas, já sabemos que 80 é uma das três primeiras notas. Logo, as quatro primeiras notas foram 75, 80, 86 e 95, e a última nota foi 84.

Exercício 11 (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):
Uma sequência de números é definida por $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + a_n^2$, para todo número natural $n \geq 1$. Por exemplo, $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$. Qual é o algarismo das unidades de a_{2015}?

Para simplificar nossa escrita, vamos escrever u_n para representar o algarismo das unidades do número a_n. Assim, precisamos determinar u_{2015}. Observemos os três primeiros termos da sequência: $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 3^2 = 3 + 9 = 12$ e $a_3 = 12 + 12^2 = 12 + 144 = 156$. Agora, é claro que $u_2 = 2$ e $u_3 = 6$. Por outro lado, poderíamos determinar u_3 sem calcular o valor de a_3 . De fato, a_3 é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são 2 e 4, respectivamente. Logo, $u_3 = 2 + 4 = 6$. Aplicando essa mesma ideia para $a_4 = 156 + 156^2$, vemos que u_4 é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são, ambos, iguais a 6. Portanto, $u_4 = 2$. Novamente aplicando este raciocínio, concluímos que $u_5 = 6$, pois é a soma de duas parcelas cujos algarismos das unidades são iguais a 2 e 4, respectivamente. Assim, aplicando este argumento sucessivamente, a partir do segundo número da sequência, concluímos que os algarismos das unidades dos números da sequência, determinam uma nova sequência que é formada, alternadamente, apenas pelos números 2 e 6. Mais precisamente, $u_n = 2$, sempre que o índice n for par, e $u_n = 6$, sempre que o índice n for ímpar. Consequentemente, $u_{2015} = 6$.

Exercício 12 (Questão 6 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2017):
Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

Seja n o número natural do enunciado. Como $n + 1$ é múltiplo de 11, existe um número natural t tal que $n + 1 = 11t$. Do mesmo modo, existe um número natural s tal que $n - 1 = 8s$. Multiplicando membro a membro essas expressões, temos $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 = 88ts$, ou seja, $n^2 = 88ts + 1$. Essa última expressão mostra que o resto da divisão de n^2 por 88 é igual a 1.