Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Noções Básicas - Parte 1

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Definição de Função

Chamamos de **grandeza** a tudo aquilo que pode ser contado ou medido, por comparação com um padrão, de modo a estar associado a um número. Alguns exemplos de grandezas são: comprimento, área, volume, massa, energia, temperatura, tempo e velocidade.

No estudo de fenômenos da Natureza é comum que algumas grandezas dependam de outras. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *A altura de uma criança depende de sua idade. Quanto maior a idade, maior a altura, sendo que essa altura tende a se estabilizar, ou seja, a ficar constante a partir de uma certa idade.*

Exemplo 2. *A pressão atmosférica varia com a altitude, sendo que, quanto maior é a altitude, menor é a pressão atmosférica. A seguir, exibimos uma tabela com a relação entre algumas altitudes e suas respectivas pressões atmosféricas.*

Altitude (em metros)	*Pressão (mmHg)*
0	760
1000	674
2000	596
3000	526
4000	462
9000	231

Em geral, a pressão atmosférica é medida em atmosferas *(abreviamos* atm*), de forma que* $1atm$ *corresponde à pressão exercida por uma coluna de mercúrio (Hg) de* $760mm$ *de altura. Por outro lado, a unidade de medida padrão para pressão, no sistema internacional de unidades (SI) é o* Pascal *(Pa). A relação entre essas duas unidades é* $1\,atm = 1,01325 \cdot 10^5 Pa$.

Exemplo 3. *Duas grandezas são ditas* **diretamente proporcionais** *se a variação de uma delas provoca a variação da outra na mesma razão, ou seja, se uma delas duplica, a outra também duplica; se uma delas triplica, a outra também triplica; se uma delas é dividida por dois, a outra também é dividida por dois, etc. Por exemplo, de acordo com a segunda lei de Newton da Mecânica, uma força* $\overrightarrow{F}$ *aplicada a um objeto provoca uma aceleração* $\overrightarrow{a}$ *diretamente proporcional a essa força. A relação entre essas duas grandezas é dada pela expressão* $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$*, ou* $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{m}$*, onde a constante* m *é a massa do objeto.*

Em cada um dos exemplos acima, há uma relação de dependência entre duas grandezas, ou seja, a variação de uma das grandezas depende da variação de outra. Assim, em cada exemplo acima temos uma grandeza que varia de modo *independente* (idade, altitude, força) e que, por isso, chamaremos *variável independente*, e uma grandeza que varia de modo *dependente* (altura da criança, pressão atmosférica, aceleração) que chamaremos *variável dependente*. Essa relação tem duas propriedades básicas:

i. Para cada valor da variável independente, há um valor correspondente da variável dependente.

ii. A cada valor da variável independente corresponde um único valor da variável dependente.

A linguagem matemática mais adequada para descrever a situação acima é a dos conjuntos: se A é o conjunto de todas as variáveis independentes e B é o conjunto de todas as variáveis dependentes, então uma relação de dependência, ou *correspondência*, f, entre os dois conjuntos de grandezas é representada pela notação

$$f : A \to B. \tag{1}$$

Essa notação é uma abreviação para o fato de que, a cada elemento a do conjunto A, corresponde um único elemento b do conjunto B. Indicamos essa correspondência entre elementos específicos escrevendo

$$f(a) = b. \tag{2}$$

Assim, no Exemplo 1, a altura de uma criança com idade i é $f(i)$; no Exemplo 2, a informação da tabela pode ser reescrita como $f(0) = 760$, $f(1000) = 674$, $f(2000) = 596$, etc.; por fim, no Exemplo 3, uma força de $10N$ (lê-se 10 "newtons" – o *Newton* é a unidade SI de medida de força) aplicada a um corpo de massa $m = 5\,kg$ provoca sobre ele uma aceleração de intensidade $f(10) = \frac{10}{5} = 2m/s^2$.

A discussão acima nos leva à seguinte definição:

> Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função f de A em B** é uma correspondência entre elementos de A e elementos de B, denotada por $f : A \to B$, que associa a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$.

Observações 4. *Nas notações da definição acima:*

i. O conjunto A *é chamado de* **domínio** *da função* f*. O conjunto* B *é chamado* **contra-domínio** *de* f*.*

ii. Se $a \in A$*, o elemento* $b = f(a) \in B$ *é chamado* **imagem de** a *pela função* f*.*

iii. Dizer que f *associa "a cada elemento* $a \in A$ *um único elemento* $b \in B$*" significa que nenhum elemento de* A *pode ficar sem imagem, e que um elemento* $a \in A$ *só pode ter uma única imagem.*

A definição de função nos permite considerar correspondências mais gerais, onde os elementos do domínio e do contra-domínio não são necessariamente números. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 5 (O carteiro)**.** *Seja A um conjunto de cartas e seja B um conjunto de casas. Podemos pensar no conjunto A como a bolsa de um carteiro e B como o conjunto de casas dentre as quais estão aquelas que serão visitadas pelo carteiro. Vamos considerar a correspondência (desculpem o trocadilho!) $f : A \to B$ que associa a uma carta $a \in A$ a casa $f(a) \in B$ para qual esta carta foi endereçada. Cada carta está associada a uma casa e uma carta não pode ir para duas casas ao mesmo tempo. Logo, f é uma função.*

Exemplo 6 (Alunos e cadeiras)**.** *Considere o conjunto A dos alunos em uma sala de aula e o conjunto B das cadeiras desta mesma sala. Seja $f : A \to B$ a correspondência que associa a cada aluno(a) a cadeira onde ele(a) está sentado(a). Se algum aluno está de pé, a correspondência não é uma função, pois um elemento do domínio (o aluno que está de pé) não corresponde a elemento algum do contra-domínio (o conjunto das cadeiras). Se um aluno ocupar duas cadeiras, f também não será uma função, porque um elemento do domínio corresponderá a dois elementos do contra-domínio (as duas cadeiras ocupadas pelo mesmo aluno). Agora, se cada aluno estiver sentado em uma só cadeira, a correspondência f será uma função, pois cada elemento do domínio estará associado a um único elemento do contra-domínio.*

Para uma função $f : A \to B$, o conjunto de todos os elementos do contra-domínio B que correspondem a algum elemento do domínio A é um subconjunto de B chamado de **imagem** da função f, e é denotado por $\operatorname{Im} f$.

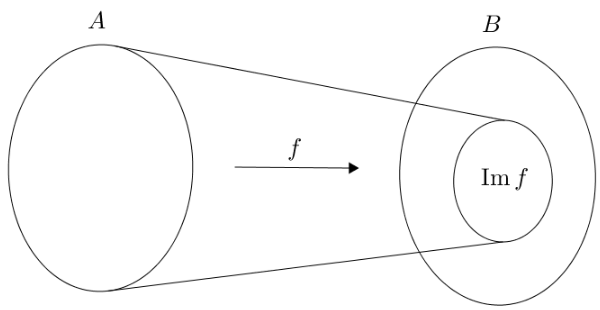

Figura 1: a imagem de uma função.

Em símbolos,

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B \mid b = f(a), \text{ para algum } a \in A\}.$$

No Exemplo 5, a imagem da função f é o conjunto de casas que receberam pelo menos uma carta. Note que pode haver casas que não receberam cartas, logo, a imagem não precisa ser igual ao contra-domínio.

No Exemplo 6, a imagem da função é o conjunto das cadeiras onde há algum aluno sentado. Pode haver cadeiras vazias, que são os elementos que pertencem ao contra-domínio mas não pertencem à imagem da função.

2 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Colecionamos, nesta seção, alguns tipos de funções que, por sua importância, merecem destaque. Ao longo da discussão, apresentamos vários exemplos para ilustrar os conceitos introduzidos.

> Dizemos que uma função $f : A \to B$ é **injetiva**, ou **injetora**, se elementos diferentes do domínio estão associados a elementos diferentes do contradomínio. Em símbolos:
>
> $$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

Vamos observar alguns dos exemplos anteriores, avaliando quais das funções são injetivas.

No Exemplo 1, não foi especificado como é medida a idade (se em anos, meses, horas, minutos, segundos, etc.) nem a altura da criança (se em metros, centímetros, milímetros, micrômetros, etc.). A experiência mostra que crianças saudáveis crescem alguns centímetros por ano e que esse crescimento se estabiliza com o tempo, determinando a altura final do adulto. Se a idade for medida em anos e a altura em centímetros, e o intervalo de tempo for, por exemplo, de 0 a 10 anos, podemos construir uma tabela de alturas para a criança em questão:

Idade (anos)	Altura (cm)
0	48
1	73
2	86
3	95
4	102
5	108
6	113
7	119
8	125
9	131
10	139

Como idades diferentes correspondem a alturas diferentes, a função f, dada pela tabela acima, que associa a cada idade a altura de nossa criança, é injetiva.

Observando a tabela do Exemplo 2, vemos que a altitudes diferentes correspondem pressões atmosféricas diferentes. Logo, a função que fornece a pressão atmosférica para cada altura também é injetiva.

Nesses dois exemplos, podemos nos perguntar: *o que acontece nos intervalos entre os números que estão na tabela*? De outro modo: se uma criança tem $86\,cm$ de altura aos 2 anos e $95\,cm$ de altura aos 3 anos, que altura ela terá aos dois anos e meio? E como varia a altura da criança de um dia para o dia seguinte? Neste período de 1 ano em que a criança cresceu de $86\,cm$ para $95\,cm$, houve um *instante* em que ela teve altura exatamente igual a 30π? Perguntas similares podem ser feitas também em relação ao Exemplo 2.

Não vamos responder aqui às perguntas do parágrafo anterior. Apenas as colocamos para enfatizar que uma tabela nem sempre é melhor maneira de descrever uma função. Existem modos mais eficientes e que trazem informações mais precisas, como no Exemplo 3, no qual temos uma *elação algébrica* entre a força e a aceleração. Assim, por exemplo, se um corpo tem massa igual a $2\,Kg$, sabemos que

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{2}, \tag{3}$$

para *qualquer* força $\overrightarrow{F}$. Ou seja, a expressão (3) nos dá uma informação completa e muito mais precisa sobre a função do que uma tabela. Voltaremos a esse tema em materiais futuros.

No Exemplo 5, a função deixa de ser injetiva se uma casa receber mais de uma carta. Por outro lado, se cada casa receber no máximo uma carta, a função é injetiva.

No Exemplo 6, a função deixa de ser injetiva se dois alunos sentarem em uma mesma cadeira. Caso alunos diferentes sentem em cadeiras diferentes, a função será injetiva.

> Dizemos que uma função é **sobrejetiva**, ou **sobrejetora**, se a sua imagem é igual ao seu contra-domínio, isto é, se cada elemento do contra-domínio é imagem de algum elemento do domínio.

No Exemplo 5, se cada casa de B receber pelo menos uma carta, então a função $f : A \to B$ é sobrejetiva. Se alguma casa do conjunto B não receber cartas, então a função $f : A \to B$ não é sobrejetiva.

No Exemplo 6, se uma cadeira da sala de aula estiver vazia, então a função f não é sobrejetiva, pois essa cadeira pertence ao contra-domínio mas não pertence à imagem. A imagem é formada pelas cadeiras onde há algum aluno sentado.

> Dizemos que uma função é **bijetiva**, ou **bijetora**, se ela for injetiva e sobrejetiva.

Novamente no Exemplo 6, se o número de alunos for igual ao número de cadeiras e cada aluno estiver sentado em uma cadeira, então a função que associa cada aluno à cadeira onde ele está sentado é bijetiva.

Exemplo 7. *Suponhamos que A e B sejam dois conjuntos finitos. Então existe uma bijeção entre A e B se, e somente se, A e B têm o mesmo número de elementos.*

Prova. De fato, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ têm o mesmo número de elementos, então $m = n$ e podemos associar os elementos de A aos de B, fazendo corresponder o primeiro elemento de A com o primeiro elemento de B, o segundo de A com o segundo de B etc., ou seja, temos uma função $f : A \to B$, dada por: $f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2,\ f(a_3) = b_3, \ldots, f(a_n) = b_n$. Essa função é injetiva, pois elementos diferentes do domínio correspondem a elementos diferentes do contra-domínio, e sobrejetiva, pois para cada $b_i \in B$ existe $a_i \in A$ tal que $f(a_i) = b_i$. Logo, f é bijetiva.

Reciprocamente, se existe uma função bijetiva $f : A \to B$, então, por f ser injetiva, elementos diferentes do domínio têm imagens diferentes. Logo, todos os elementos de A têm cópias distintas em B. Com isso, $n \leq m$ pois B deve ter pelo menos n elementos. Além disso, como f também é sobrejetiva, todos os elementos de B são imagens de elementos de A, logo B é "coberto" por A e $n \geq m$. Portanto, $n = m$ e os conjuntos A e B têm um mesmo número de elementos. □

O exemplo a seguir ilustra uma situação similar à exibida no exemplo 7, mas onde os conjuntos envolvidos são infinitos. Ele mostra que, contrariamente ao caso de conjuntos finitos, podem existir funções bijetivas entre um conjunto infinito e um de seus subconjuntos próprios.

Exemplo 8. *Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais, e $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais pares. É claro que $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Por outro lado, a função $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetiva.*

Prova. Realmente, se a e b são números naturais distintos, então os seus dobros também são distintos, ou seja, se $a \neq b$, então $2a \neq 2b$. Logo, a função f é injetiva. Além disso, se n é um númro natural par, então, por definição, $n/2$ é um número natural, de forma que $n = 2 \cdot \frac{n}{2} = f(n/2)$. Logo, f é sobrejetiva. □

Ainda a propósito da demonstração do exemplo anterior, observe que a igualdade $n = 2 \cdot \frac{n}{2}$ sempre é válida; contudo, só pudemos escrever $2 \cdot \frac{n}{2} = f(n/2)$ porque $\frac{n}{2}$ pertence ao domínio de f, i.e., é um número natural.

Para o próximo exemplo, recorde que dois segmentos de reta são chamados *paralelos* se as retas que os contêm são paralelas.

Exemplo 9. *Sejam AB e CD dois segmentos de reta paralelos. Então, existe uma função bijetiva $f : AB \to CD$ que leva cada ponto do segmento AB em um ponto do segmento CD.*

Prova. Vamos supor, de início, que os segmentos AB e CD não têm um mesmo tamanho. Sendo esse o caso, as semirretas CA e DB intersectam-se no ponto O (veja a Figura 2).

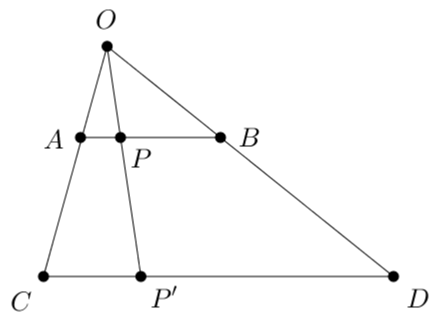

Figura 2: uma função bijetiva de AB em CD.

Considere a semirreta OP, determinada pelo ponto O e por um ponto P do segmento AB. Essa semirreta intersecta o segmento CD em um ponto P' (veja novamente a Figura 2). Considere a função $f : AB \to CD$ que associa cada ponto $P \in AB$ ao ponto $P' \in CD$, obtido como acima.

A função definida acima é injetiva, porque pontos $P, Q \in AB$ distintos determinam semirretas OP e OQ distintas; logo, as interseções de OP e OQ com CD também devem ser distintas, pois se fossem iguais, as duas semirretas teriam dois pontos em comum e, portanto, seriam elas mesmas iguais.

A função f também é sobrejetiva, porque cada ponto $P' \in CD$ determina uma única semirreta OP', que intersecta AB em um ponto P. Pela construção da função, $f(P) = P'$.

No caso em que AB e CD têm um mesmo comprimento e o sentido de A para B coincide com aquele de C para D, a Geometria Euclidiana ensina que as semirretas CA e DB são *paralelas*. Então, definimos a função f do seguinte modo: dado $P \in AB$ seja ℓ a reta que passa por P e é paralela à semirreta CA e, portanto, também é paralela à semirreta DB. Estabeleça a imagem de P por f como sendo o ponto de interseção de ℓ com CD. Os argumentos que usamos acima podem ser repetidos para este caso (convidamos o leitor a fazê-lo), mostrando que a função assim obtida também é bijetiva. □

Observamos que o resultado do exemplo anterior continua válido mesmo quando AB e CD não forem paralelos. Para isso, é necessário reposicionar um dos segmentos de modo que eles passem a ser paralelos, mostrar que esse reposicionamento é uma função bijetiva e considerar a ação simultânea das duas funções. Explicaremos com mais detalhe o que ocorre nesse caso ao estudarmos o conceito de *composição* de funções.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Você pode trabalhar com exemplos antes de dar a definição formal de função. Os exemplos ilustram a definição e tornam mais claras as exigências que temos que fazer sobre uma correspondência para que ela seja uma função.

A própria ideia intuitiva de função pode ser introduzida de várias maneiras, dependendo dos exemplos que a motivem. Olhando o Exemplo 6, temos uma ideia de função como uma correspondência *estática* entre dois conjuntos (mesmo que os alunos não se movam, a função está lá). O exemplo 5 já nos dá uma ideia *dinâmica* de função, pois há uma ação envolvida (para haver função, o carteiro tem que fazer a entrega das cartas).

O Exemplo 6 é particularmente interessante, por ser fácil de trabalhar em sala de aula e envolver diretamente os alunos. Você pode, inclusive, montar com os alunos diversas situações. Por exemplo, se um dos alunos ficar de pé, ele será um elemento do domínio sem correspondente no contradomínio, logo a correspondência, neste caso, deixará de ser uma função.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, Volume 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.