Questão 1. Determine os algarismos x e y de modo que o número inteiro com representação decimal $45xy$ seja divisível por 4 e por 9.

O inteiro $45xy$ é divisível por 9 se, e somente se, $x+y+4+5=x+y+9$ é divisível por 9. Como 9 é divisível por 9, então $45xy$ é divisível por 9 se, e somente se, $x+y$ é divisível por 9. O inteiro $45xy$ é divisível por 4 se, e somente se, $10x+y=8x+2x+y$ é divisível por 4. Como $8x$ é divisível por 4, então $45xy$ é divisível por 4 se, e somente se, $2x+y$ é divisível por 4. Considerando que $x,y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, verifica-se facilmente que $x+y$ é divisível por 9 se, e somente, (x,y) é igual a um dos seguintes pares: $(0,0)$, $(0,9)$, $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$, $(7,2)$, $(8,1)$, $(9,0)$ e $(9,9)$. Verificando quais desses pares de valores para (x,y) cumprem a condição de $2x+y$ ser divisível por 4, obtém-se que os valores de (x,y) para que $45xy$ seja divisível por 9 e por 4 são $(0,0)$, $(3,6)$ e $(7,2)$.

Questão 2 (Problema 16.3 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Qual é o máximo divisor comum dos números 1221, 2332, 3443, 4554,..., 8998?

Veja que a diferença de dois desses números é múltiplo de $2332-1221=1111$, pois $[n][n+1][n+1][n]-[m][m+1][m+1][m]=[n-m][n-m][n-m][n-m]=(n-m)\times 1111$. Dessa forma o mdc desses números é divisor de $1111=11\times 101$. Ambos os fatores são primos e 101 não divide 1221, mas 11 divide todos os 8 números. Assim, 11 é o mdc procurado.