Aluno: ____

Professora: Fabiana Rodrigues

Exercício 1 (Questão 16 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2016):
A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio com as bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?

Como a bolinha que caiu não foi encontrada, nada se pode afirmar sobre ela, isto é, se ela era de João ou não era, então, tudo se passa como se ela ainda estivesse na caixa. Portanto, a probabilidade de João vencer é de 2 chances em 20, ou seja, 2 /20 = 1/10.

Uma outra maneira de resolver o problema é dividi-lo em casos:

Caso 1. A bolinha que caiu era a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é 0, sua bolinha nunca será sorteada.

Caso 2. A bolinha que caiu não é a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é

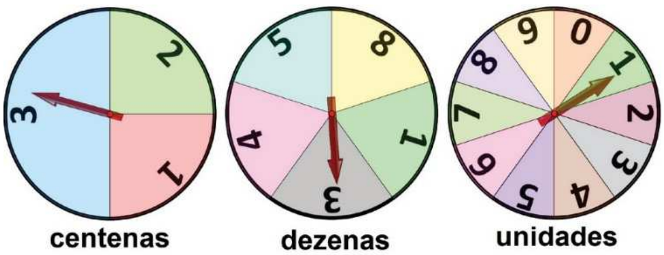
$$\frac{19}{20}\cdot\left(\frac{1}{19}+\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}\right)=\frac{1}{10}$$

De fato, a probabilidade da bolinha não ser a de João é 19/20. Para João ter ganhado, ou isto ocorreu já na primeira retirada (1 bola entre 19 no total) ou isto não ocorreu da primeira vez (com probabilidade 18/19) e a segunda bola retirada foi a de João (com probabilidade 1/18).

Exercício 2 (Questão 16 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2006):
Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Dela são retiradas ao acaso duas bolas. Qual a probabilidade de que o maior número assim escolhido seja o 4?

O número de maneiras de retirarmos duas bolas da caixa é 10, o que podemos ver listando as possibilidades: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$. O 4 é maior número escolhido em 3 casos. Logo a probabilidade pedida é $\frac{3}{10}$.

Exercício 3 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):
Na figura, o círculo das centenas está dividido em três setores, um semicircular e outros dois de mesma área. Cada um dos outros dois círculos está dividido em setores de mesma área. As setas nesses círculos, quando giradas, param ao acaso em algum setor, determinando um número de três algarismos. Por exemplo, na figura elas determinaram o número 331.



Qual é a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260?

O número de casos possíveis corresponde à quantidade de números de três algarismos que podem ser formados com as três roletas é $3\times 5\times 10 = 150$. Se o dígito das centenas for 3, o número formado é maior que 260. São $5\times 10 = 50$ números que começam com 3. Se o dígito das centenas for 2, então o dígito das dezenas deve ser 8. São 10 números cujo dígito das centenas é 2 e o dígito das dezenas é 8. Assim, a quantidade de números maiores que 260 é $50 + 10 = 60$. A probabilidade de que o número determinado pelas setas seja maior que 260 é $\frac{60}{150} = \frac{2}{5}$.

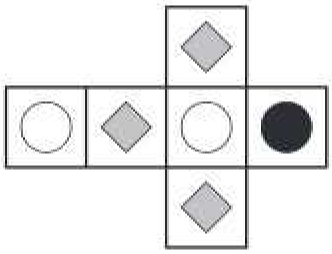
Exercício 4 (Questão 19 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):
Dois dados têm suas faces pintadas de vermelho ou azul. Ao jogá-los, a probabilidade de observarmos duas faces superiores de mesma cor é $\frac{11}{18}$. Se um deles tem cinco faces vermelhas e uma azul, quantas faces vermelhas tem o outro?

Podemos supor que o primeiro cubo tem cinco faces vermelhas e uma branca. Seja v o número de faces vermelhas do segundo cubo. Ao se lançar os dois dados, há $6 \times 6 = 36$ casos possíveis. Para que as faces tenham a mesma cor, devem ser ambas vermelhas ($5 \times v$ possibilidades) ou ambas azuis ($1 \times (6 - v)$ possibilidades). A probabilidade de se observar faces iguais é, portanto,

$$\frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{5v + (6 - v)}{36} = \frac{2v + 3}{18} = \frac{11}{18}.$$

Assim, deve-se ter $2v + 3 = 11$, ou seja, $v = 4$. O segundo cubo deve ter, portanto, 4 faces vermelhas.

Exercício 5 (Questão 14 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):
Um dado foi construído usando a planificação da figura. Qual é a probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes?



Podemos obter dois símbolos iguais das seguintes formas:

- 2 quadrados cinzas de $3 \times 3 = 9$ formas;
- 2 círculos brancos de $2 \times 2 = 4$ formas;
- 2 círculos pretos de $1 \times 1 = 1$ forma.

Totalizando $9 + 4 + 1 = 14$ formas de obter 2 símbolos iguais. O número total de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, logo a probabilidade de obter dois símbolos iguais é $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$. Segue que a probabilidade de obter dois símbolos distintos é $1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$.

Exercício 6 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2011):
Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

As amigas podem escolher suas blusas, sem restrição, de $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras diferentes. Por outro lado, se elas devem escolher blusas sem repetição de cores e uma delas já escolheu a sua entre as 3 possibilidades, uma outra terá apenas 2 possibilidades e a última apenas 1, num total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades sem repetição de cores. Logo a probabilidade em questão é igual a $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Exercício 7 (Questão 19 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):
Brasil e Argentina participam de um campeonato internacional de futebol no qual competem oito seleções. Na primeira rodada serão realizadas quatro partidas, nas quais os adversários são escolhidos por sorteio. Qual é a probabilidade de Brasil e Argentina se enfrentarem na primeira rodada?

Como há 7 possíveis adversários para o Brasil, todos com a mesma chance de serem escolhidos, a probabilidade do adversário do Brasil na primeira rodada ser a Argentina é $\frac{1}{7}$

Exercício 8: Uma caixa contém 20 peças em boas condições e 15 em más condições. Uma amostra de 10 peças é extraída. Calcular a probabilidade de que ao menos uma peça na amostra seja defeituosa.

A probabilidade de que nenhuma peça seja defeituosa é

$$\frac{C_{20}^{10}}{C_{35}^{10}} = \frac{20!\cdot 25!}{10!\cdot 35!} \approx 0{,}001.$$

A probabilidade de que pelo menos uma peça seja defeituosa é aproximadamente igual a $1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

Exercício 9: Dez pessoas são separadas em dois grupos de 5 pessoas cada um. Qual é a probabilidade de que duas pessoas determinadas A e B façam parte do mesmo grupo?

<u>1ª Solução</u>: Colocada a pessoa A, há 9 posições possíveis para B, das quais 4 são favoráveis. Logo, a probabilidade é $\frac{4}{9}$.
<u>2ª Solução</u>: O número de casos possíveis é $C_{10}^5 = 252$, pois há $C_{10}^5 = 252$ modos de escolher o primeiro grupo e, depois disso, há apenas um modo de escolher o segundo grupo; o número de casos favoráveis é $2 \cdot C_8^3 = 112$, pois há $C_8^3 = 56$ modos de distribuir as pessoas com A e B no primeiro grupo e há outro tanto com A e B no segundo grupo. A probabilidade é $\frac{112}{252} = \frac{4}{9}$.

Exercício 10: 5 homens e 5 mulheres compram 10 cadeiras consecutivas na mesma fila de um teatro. Supondo que se sentaram aleatoriamente nas 10 cadeiras, calcular a probabilidade de que homens e mulheres se sentem em cadeiras alternadas.

Há 10! casos possíveis, dos quais $2 \cdot 5! \cdot 5!$ são favoráveis, pois há dois modos de intercalar homens e mulheres (pode-se começar por homem ou por mulher), 5! modos de arrumar os homens nos lugares a eles destinados e 5! modos de arrumar as mulheres nos lugares a elas destinados. A probabilidade é $\frac{2\cdot 5!\cdot 5!}{10!} = \frac{1}{126}$.

Exercício 11: Uma urna contém 4 bolas brancas, 4 bolas pretas e 4 bolas vermelhas. Sacam-se 6 bolas dessa urna. Determine a probabilidade de serem sacadas 2 bolas de cada cor supondo a extração sem reposição.

Como a extração é sem reposição, podemos imaginar as bolas retiradas simultaneamente. Há C_{12}^6 modos de sacar 6 bolas da urna. Há $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2$ modos de sacar 2 bolas brancas, 2 pretas e 2 vermelhas. A resposta é $\frac{C_4^2\cdot C_4^2\cdot C_4^2}{C_{12}^6} = \frac{18}{77}$.

Exercício 12: Há 8 carros estacionados em 12 vagas. Qual é a probabilidade das vagas vazias serem consecutivas?

Há C_{12}^{4} modos de selecionar as 4 que não serão ocupadas e 9 modos de escolher 4 vagas consecutivas, a saber:

$$(1\ 2\ 3\ 4, 2\ 3\ 4\ 5, \dots, 9\ 10\ 11\ 12).$$

A probabilidade é $\frac{9}{C_{12}^{4}} = \frac{14}{55}$.