Material Teórico - Módulo Progressões Aritméticas

PAs de Segunda Ordem

Primeiro Ano

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 PAs de segunda ordem

Dizemos que uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma **PA de segunda ordem**[1] se a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$, dada para $k \geq 1$ por $b_k = a_{k+1} - a_k$, for uma PA não constante.

Para construir uma PA de segunda ordem $(a_k)_{k\geq 1}$, podemos começar com uma PA não constante, por exemplo

$$(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots);$$

em seguida, estipulamos o termo inicial da PA de segunda ordem, digamos $a_1 = 2$, e, a partir daí, calculamos a_2, a_3, ... utilizando as relações

$$a_2 - a_1 = 3,\ a_3 - a_2 = 7,\ a_4 - a_3 = 11,\ \ldots.$$

Assim fazendo, obtemos a PA de segunda ordem

$$(2, 5, 12, 23, 38, 57, 80, \ldots).$$

O exemplo acima deixa claro que uma PA de segunda ordem só fica totalmente determinada se conhecermos seus três primeiros termos. De fato, só sabendo seus três primeiros termos é que teremos os dois primeiros termos da PA não constante formada pelas diferenças.

A proposição a seguir mostra como calcular o termo geral de uma PA de segunda ordem

Proposição 1. *Dada uma PA de segunda ordem $(a_k)_{k\geq 1}$, temos*

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}, \tag{1}$$

onde $r = a_3 - 2a_2 + a_1$ é a razão da PA não constante formada pelas diferenças entre termos consecutivos da sequência $(a_k)_{k\geq 1}$.

Solução. Denote $b_k = a_{k+1} - a_k$, para todo $k \geq 1$, de sorte que $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r. Somando membro a membro as igualdades

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\cdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= b_{n-2} \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

e efetuando os cancelamentos possíveis no primeiro membro, obtemos

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}.$$

Agora, como $(b_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, podemos utilizar sucessivamente as fórmulas para a soma dos termos e para o termo geral de PAs para obter

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} &= \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2} \\ &= \frac{\big(b_1 + (b_1 + (n-2)r)\big)(n-1)}{2} \\ &= b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}. \end{aligned}$$

Mas, como $b_1 = a_2 - a_1$, segue dos cálculos que fizemos acima que

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) \\ &= a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2} \\ &= a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)r}{2}. \end{aligned}$$

Por fim, resta notar que

$$\begin{aligned} r &= b_2 - b_1 \\ &= (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) \\ &= a_3 - 2a_2 + a_1. \end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir mostra que, o mais das vezes, melhor que tentar decorar (1) é repetir o argumento da demonstração.

Exemplo 2. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ a sequência definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 3n - 1$ para todo inteiro positivo n. Calcule, em função de n, o $n-$ésimo termo dessa sequência.*

Solução. Veja que $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de segunda ordem, pois $a_{n+1} - a_n = 3n - 1$ e a sequência $n \mapsto 3n - 1$ é a PA não constante $(2, 5, 8, 11, \ldots)$.

Para calcular a_n em função de n, em vez de aplicar diretamente o resultado da proposição anterior, seguiremos os passos de sua prova. Para tanto, começamos escrevendo

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 \\ a_3 - a_2 &= 5 \\ a_4 - a_3 &= 8 \\ &\cdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 3(n-2) - 1 \\ a_n - a_{n-1} &= 3(n-1) - 1. \end{aligned}$$

Em seguida, somamos as igualdades acima membro a membro e efetuamos os cancelamentos possíveis para obter

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= 2 + 5 + 8 + \cdots + \big(3(n-1) - 1\big) \\ &= \frac{\big(2 + (3n-4)\big)(n-1)}{2} \\ &= \frac{(3n-2)(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

[1] Este material é um extrato do Capítulo 4 de [1].

Por fim, como $a_1 = 1$, chegamos a

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \frac{(3n-2)(n-1)}{2} \\ &= 1 + \frac{(3n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\big(3n^2 - 5n + 4\big). \end{aligned}$$

□

Voltando à Proposição 1, podemos utilizar (1) para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA de segunda ordem $(a_k)_{k\geq 1}$, cuja PA das diferenças tenha razão $r = a_3 - 2a_2 + a_1$. Para tanto, começamos escrevendo (1) com k no lugar de n:

$$a_k = a_1 + (a_2 - a_1)(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)r}{2}.$$

Em seguida, utilizando a notação Σ e a fórmula para a soma dos termos de uma PA, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \Big(a_1 + (a_2 - a_1)(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)r}{2}\Big) \\ &= na_1 + (a_2 - a_1)\sum_{k=1}^{n}(k-1) + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2) \\ &= na_1 + (a_2 - a_1)\frac{n(n-1)}{2} + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2). \end{aligned}$$

Vemos, portanto, que calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA de segunda ordem requer calcularmos, em função de n, a soma

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2).$$

Para fazer isso, podemos começar escrevendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-2) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2 - 3k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n, \end{aligned}$$

de sorte que nos resta calcular

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

em função de n.

A maneira mais simples de fazê-lo começa percebendo que

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - k^3 &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 \\ &= 3k^2 + 3k + 1. \end{aligned}$$

Em seguida, fazemos k variar de 1 a n, obtendo as igualdades

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ 4^3 - 3^3 &= 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \\ &\dots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1. \end{aligned}$$

Por fim, somamos tais igualdades membro a membro e efetuamos os cancelamentos possíveis para obter

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &\quad + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n \\ &= 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}\Big((n+1)^3 - 1^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n^2 + 3n}{2} - n\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Para a média dos alunos, este material pode servir como ilustração da ideia de somar membro a membro igualdades como em (2): tanto podemos utilizá-las para calcular a_n em função de n, se conhecermos a_1 e soubermos calcular $b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$, quanto para calcular $b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$, se conhecermos a_n e a_1. Para alunos mais interessados em Matemática, uma continuação natural deste material é o estudo de *recorrências lineares de segunda ordem*, as quais podem ser encontradas no Capítulo 4 de [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.