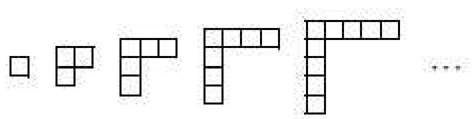
Exercício 1 (Problema 0.3 – Círculo Matemático de Moscou):
Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anular é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar o nono. Inverta a orientação novamente, voltando para o dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar dessa forma, indo e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?

Vamos olhar os números que correspondem ao polegar. Ele começa com o número $a_1 = 1$, depois contamos 4 do indicador ao mindinho e quatro novamente de volta (do anular ao polegar), de modo que o próximo número associado ao polegar é $a_2 = 1 + 8 = 9$. O próximo número associado ao polegar é $a_3 = 1 + 2 \cdot 8 = 17$, e a cada visita subsequente ao polegar é preciso somar 8 ao número anterior. Vemos que a sequência de números associado ao polegar forma uma progressão aritmética de razão 8, logo $a_n = 1 + 8 \cdot (n - 1)$. Como $1000 = 8 \cdot 250$, então $a_{251} = 1001$. Portanto, o indicador será o milésimo.

Exercício 2 (Problema 2.1 – Círculo Matemático de Moscou):
Eis uma série de figuras:

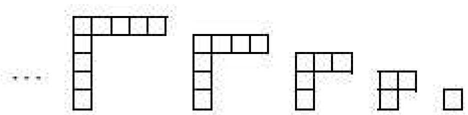


A primeira consiste de um quadrado. Quantos quadrados há na centésima figura? Quantos quadrados há ao todo nas 100 primeiras figuras?

Há um quadrado na primeira figura e, em cada uma das seguintes, dois a mais que na anterior. Logo, podemos representar essa sequência por $a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) = 2n - 1$ (a sequência de números naturais ímpares). A centésima figura terá $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$ quadrados. Para saber quantos quadrados há no total basta calcular a soma de uma progressão aritmética e obtemos o número total de quadrados:

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (a_1 + a_{100})}{2} = \frac{100 \cdot 200}{2} = 100^2 = 10000.$$

Podemos também considerar os diagramas em ordem inversa:



Note que a primeira figura (que agora é a última) cabe na segunda (penúltima, agora) para formar um quadrado 2×2. Tudo isso cabe dentro da próxima figura para formar um quadrado 3×3, e assim por diante. Logo as 100 primeiras figuras juntas formam um quadrado 100×100, que contem $100 \cdot 100 = 10000$ pequenos quadrados.

Exercício 3 (Problema 6.7 – Círculo Matemático de Moscou):
Carol está viajando de avião. Primeiro leu um livro; depois dormiu; depois olhou pela janela e depois bebeu um suco de laranja. Cada uma dessas atividades, exceto a primeira, levou exatamente a

metade do tempo que a anterior. Ela começou a ler seu livro ao meio-dia e terminou seu suco de laranja às $13:00$h. Quando Carol começou a olhar pela janela?

Vamos supor que Carol levou a minutos para ler o livro. Os tempos em que Carol realizou cada uma das atividades formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. O tempo total utilizado para as quatro atividades foi de $a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = a \cdot \frac{1-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{15a}{8}$ minutos. Como $\frac{15a}{8} = 60$, então $a = 32$. Assim, Carlo demorou 32 minutos em ler o livro e dormiu por 16. Assim, começou a olhar pela janela após $32 + 16 = 48$ minutos, ou seja, às $12:48$h.

Exercício 4 (Problema 8.4 – Círculo Matemático de Moscou):

Um bando de gansos brancos voou sobre uma cadeia de lagos. Cada vez que chegavam a um lago, metade dos gansos remanescentes mais meio ganso aterrissava no lago, enquanto os outros continuavam a voar. Quando chegaram ao sétimo lago, os últimos gansos aterrissaram. Quantos gansos havia no bando?

O problema tem uma solução simples: adicione um ganso ao bando – digamos um ganso cinza, para não ser confundido com os outros. Com o ganso extra, exatamente metade dos gansos irão aterrissar em cada lago. No sétimo lago, exatamente metade dos gansos que chegaram até aí irão aterrissar e só nosso ganso cinza irá continuar voando; logo 1 ganso aterrissa. O número de gansos que aterrissa em cada lago forma um dos valores de uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$. Temos $a_1 = a$ e $a_7 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{a}{64} = 1$, assim $a = 64$. O número total de gansos brancos é $1 + 2 + 4 + \cdots + 64$. Uma forma simples de calcular a soma é escrevendo:

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 64,$$

$$2S = 2 + 4 + \cdots + 64 + 128.$$

Subtraindo esses valores obtemos que haviam $S = 128 - 1 = 127$ gansos brancos.

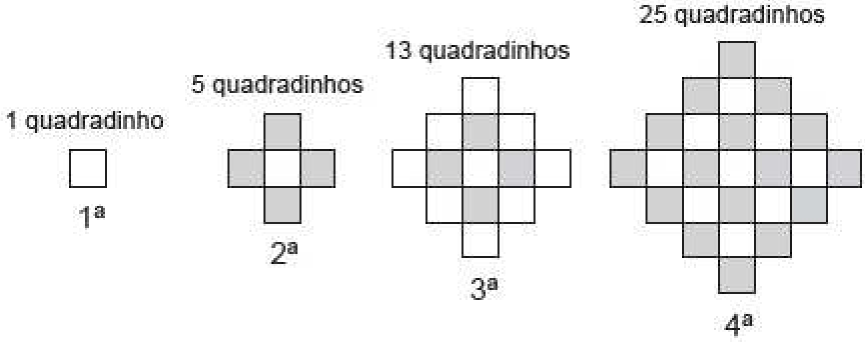
Exercício 5 (Problema CI.1 – Círculo Matemático de Moscou):

Um carteiro retira as cartas de uma caixa de correio pública 5 vezes ao dia. Se ele abrir a caixa de correio em intervalos de tempos iguais começando às $07:00$ h e terminando às $19:00$ h, de quanto será o intervalo de tempo?

Os horários em que o carteiro abre a caixa de correios formam uma progressão aritmética com $a_1 = 7$ e $a_5 = 19 = 7 + 4 \cdot d$, onde d razão da progressão aritmética. Logo $d = 3$ horas.

Exercício 6 (Questão 16 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2009 – Modificado):

Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2018 quadradinhos?

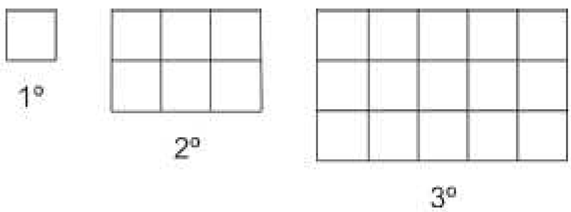


Considere a_n o número de quadradinhos que a figura n tem a mais da figura anterior. Por exemplo $a_2 = 4$, $a_3 = 4+4$, $a_4 = 4+4+4$ e assim por diante. Ou seja, a sequência de números a_n forma uma progressão aritmética de razão 4. Vemos claramente que $a_n = 4(n-1)$. A figura n possui $S_n = 1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ quadradinhos. Sabemos que

$$a_2 + \cdots + a_n = \frac{(n-1)(a_2+a_n)}{2} = \frac{(n-1)\big(4+4(n-1)\big)}{2} = \frac{4n(n-1)}{2} = 2n(n-1).$$

Comparando $2n^2$ com 2018, temos que $\sqrt{\frac{2018}{2}} \approx 31{,}76$, então calculamos $S_{32} = 2 \times 32 \times 31 + 1 = 1985$, $S_{33} = 2 \times 33 \times 32 + 1 = 2113$. Logo a primeira figura que possui mais de 2018 quadradinhos é a figura 33.

Exercício 7 (Questão 4 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2008):
Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 100° retângulo dessa sequência?



O perímetro da primeira figura é $p_1 = 4$, da segunda figura $p_2 = 4+6$, da terceira figura $a_3 = 10 + 6$ e assim por diante. Dessa forma vemos claramente que ao aumentar uma linha, o perímetro aumenta de 2 cm e ao aumentar duas colunas, o perímetro aumenta de 4, totalizando 6 cm a mais que na figura anterior. Assim, $p_n = 4 + 6 \times (n-1) = 6n - 2$. Logo o perímetro do centésimo quadrado é $p_{100} = 6 \times 100 - 2 = 598$.

Exercício 8:
A soma dos 15 termos de uma progressão aritmética é 465. Se o primeiro termo dessa progressão é 5, qual é a razão dessa progressão?

Seja a_n o n-ésimo termo da progressão aritmética, nesse caso temos

$$495 = \frac{15 \times (5 + a_{15})}{2}.$$

Daí obtemos $a_{15} = 61$. Como $a_{15} = 5 + r \times (15-1)$, onde r é a razão, temos $r = 4$.

Exercício 9:
Se cada coelha de uma colônia gera três coelhas, qual o número de coelhas da sétima geração que serão descendentes de uma única coelha (a primeira geração consta de 3 coelhas).

Chame q_n o número de coelhos da n-ésima geração. Trata-se de uma progressão aritmética onde $q_1 = 3$ e razão 3, logo $q_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$. A sétima geração consta de $3^7 = 2187$ coelhas.

Exercício 10:
Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora e a cada hora após a primeira, a metade do que percorre na hora precedente. Assim, na segunda hora percorre 128 m, na terceira hora 64 m, e assim por diante. Determine o tempo necessário para completar um percurso de 480 m.

A distância por hora percorrida pelo alpinista forma uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é $q_1 = 256$ e a razão é $r = \frac{1}{2}$. O termo n-ésimo é $q_n = \frac{256}{2^{n-1}}$ e a soma dos n primeiros termos é $S_n = q_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 256 \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 512 - \frac{512}{2^n} = 480$. Daí $n = 4$.

Exercício 11:
Numa progressão geométrica de 6 termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 8 e a soma dos dois últimos vale 648. Calcule a razão da progressão.

Sejam $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5$ os 6 termos da progressão geométrica. De acordo aos dados, temos $a + ar = 8$ e $ar^4 + ar^5 = 648$. Observe que $ar^4 + ar^5 = r^4(a + ar) = 8r^4$. Isso implica que $r^4 = \frac{648}{8} = 81$, isto é, $r = 3$.

Exercício 12:
Numa progressão geométrica, o terceiro termo é -48 e o sexto termo é 6. Calcule o primeiro termo e a razão da progressão.

Seja r a razão da progressão e a o primeiro termo. Então $q_3 = -48 = ar^2$ e $q_6 = 6 = ar^5$. Dividindo ambas equações obtemos $\frac{ar^2}{ar^5} = \frac{1}{r^3} = \frac{-48}{6} = -8$, daí $r = -\frac{1}{2}$. De $-48 = a \times \frac{1}{4}$ obtemos $a = -192$.

Exercício 13:
A soma dos termos de uma progressão geométrica com uma infinidade de termos é igual a 5. Se o primeiro termo é 3, calcule a razão da progressão geométrica.

Seja $a = 3$ o primeiro termo da progressão e $S = \frac{a}{1-r} = 5$ a soma de todos os termos da progressão geométrica, onde r é a razão. Então $\frac{3}{1-r} = 5 \Longrightarrow 3 = 5 - 5r \Longrightarrow r = \frac{2}{5}$.