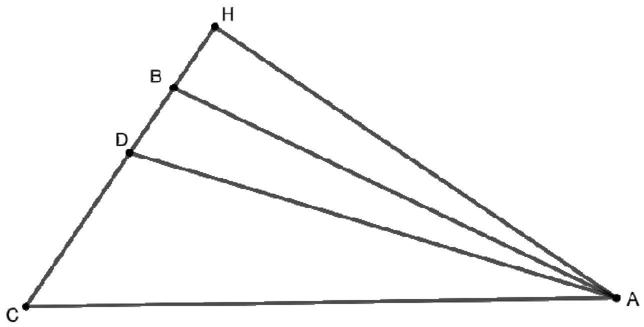
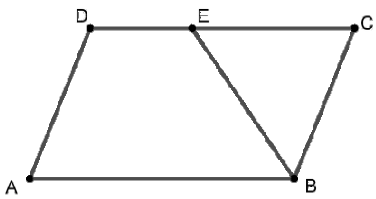
Exercício 1:
Na figura abaixo, o triângulo ACH é retângulo em H e AD é a bissetriz de ACH relativa ao vértice A. Os ângulos internos do triângulo ABC em B e C medem $110°$ e $30°$, respectivamente. Calcule a medida do ângulo interno do triângulo ABD em A.



Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a $180°$, sendo que os ângulos internos desse triângulo em B e C medem $110°$ e $30°$, respectivamente, então o ângulo interno de ABC em A mede $40°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ACH é igual a $180°$, sendo que os ângulos internos desse triângulo em C e H medem $30°$ e $90°$, respectivamente, então o ângulo interno de ACH em A mede $60°$. Como AD é a bissetriz de ACH relativa ao vértice A e o ângulo interno de ACH em A mede $60°$, então $\widehat{CAD} = \frac{60}{2} = 30°$. Como $\widehat{BAC} = 40°$, $\widehat{CAD} = 30°$ e $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} - \widehat{CAD}$, então $\widehat{BAD} = 10°$.

Exercício 2:
No paralelogramo $ABCD$ da figura abaixo, o segmento de reta BE é a bissetriz do ângulo ABC. Sabendo que $DE = 2$ e $AD = 5$, calcule o perímetro de $ABCD$.



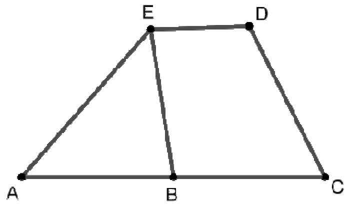
Como AB e CD são paralelos, então $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180°$. Como $\widehat{BCD} = \widehat{BCE}$ e $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180°$, então $\widehat{ABC} + \widehat{BCE} = 180°$. Por outro lado, como BE é a bissetriz de $\widehat{ABC}$, então $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{CBE}$. Como $\widehat{ABC} + \widehat{BCE} = 180°$ e $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{CBE}$, então $2 \cdot \widehat{CBE} + \widehat{BCE} = 180°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo BCE é igual a $180°$, então $\widehat{CBE} + \widehat{BEC} + \widehat{BCE} = 180°$. Como $2 \cdot \widehat{CBE} + \widehat{BCE} = 180°$ e $\widehat{CBE} + \widehat{BEC} + \widehat{BCE} = 180°$, então $\widehat{BEC} = \widehat{CBE}$. Como $\widehat{BEC} = \widehat{CBE}$, então os lados BC e CE do triângulo BCE são iguais. Como $CE = BC = AD = 5$, $DE = 2$ e $CD = DE + CE$, então $CD = 2 + 5 = 7$. Assim, o perímetro de $ABCD$ é igual a $2 \cdot (AD + CD) = 2 \cdot (5 + 7) = 24$.

Exercício 3:
Os vértices de um losango são os pontos médios dos lados de um retângulo. Calcule a razão entre a área do retângulo e a área do losango.

Se os lados perpendiculares do retângulo medem a e b, então a área do losango é igual a $ab - 4 \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} = ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$. Como a área do retângulo é igual a ab, então a razão entre a área do retângulo e a área do losango é igual a $\frac{ab}{\frac{ab}{2}} = 2$.

Exercício 4:

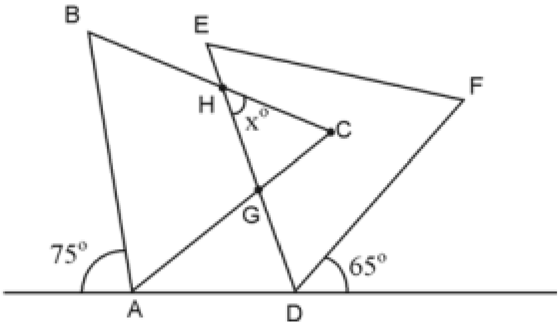
Na figura abaixo, AC é paralelo a DE, $AB = BC = 3$ cm e $\frac{BC}{DE} = 2$. A área do triângulo ABE é igual a 3 cm^2. Calcule a área do trapézio $BCDE$.



Seja h cm a altura do triângulo ABE relativa ao vértice E. Então, a área de ABE é igual a $\frac{AB \cdot h}{2} = 3$ cm^2 e, como $AB = 3$ cm, segue que $h = 2$. A altura do trapézio $BCDE$ é igual à altura de ABE relativa ao vértice E, ou seja, a altura de $BCDE$ é igual a $h = 2$ cm. Por outro lado, como $\frac{BC}{DE} = 2$ e $BC = 3$ cm, então $DE = \frac{3}{2}$ cm. Assim, a área de BCDE é igual a $\frac{BC+DE}{2} \cdot h = \frac{3+\frac{3}{2}}{2} \cdot 2 = \frac{9}{2}$ cm^2.

Exercício 5 (Questão 2 – 6ª Lista – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2006):

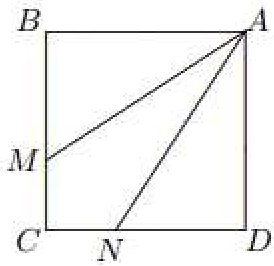
Na figura, os dois triângulos ABC e EDF são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



Como ABC e DEF são triângulos equiláteros, cada um de seus ângulos internos mede $60°$. No triângulo AGD, temos $\widehat{DAG} = 180° - 75° - 60° = 45°$ e $\widehat{ADG} = 180° - 65° - 60° = 55°$. Portanto, $\widehat{AGD} = 180° - 45° - 55° = 80°$. Os ângulos $\widehat{AGD}$ e $\widehat{CGH}$ são iguais, pois são opostos pelo vértice, e logo, $\widehat{CGH} = 80°$. Logo, no triângulo CGH, temos $x° + 80° + 60° = 180°$, donde $x = 40$.

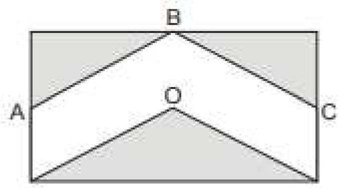
Exercício 6 (Questão 8 – Lista 7 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2007):

Três amigas compraram um terreno quadrado e querem reparti-lo como indicado na figura, porque em A se encontra uma fonte de água. Elas querem também que as áreas das três partes sejam iguais. Onde devem estar os pontos M (sobre BC) e N (sobre CD)?

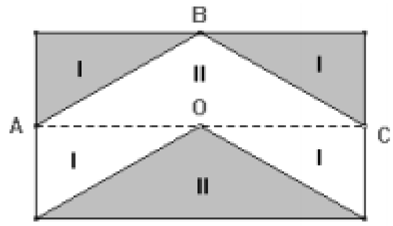


Como as áreas dos triângulos ABM e ADN são iguais e $AB = AD$, temos $\frac{BM \cdot AB}{2} = \frac{DN \cdot AD}{2}$ e, logo, $BM = DN$. Assim, o quadrilátero $AMCN$ é simétrico em relação à diagonal AC de $ABCD$. Portanto, a área do triângulo ACN é igual à metade da área do triângulo ADN. Agora, como esses triângulos têm a mesma altura relativa ao vértice A, então $DN = 2 \cdot CN$ e, pela simetria, temos que $BM = 2 \cdot CM$. Assim, BM é igual a $\frac{2}{3}$ do lado do quadrado, o mesmo ocorrendo com DN.

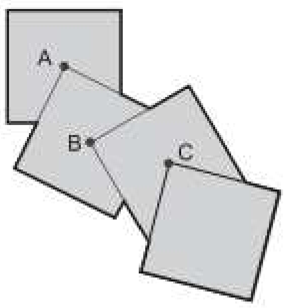
Exercício 7 (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2006):
No retângulo abaixo, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. Calcule a razão entre a área da região sombreada e a área do retângulo.



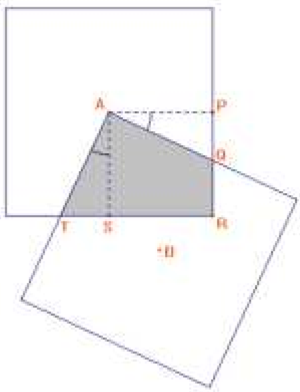
Como A, B e C são pontos médios, os quatro triângulos rotulados com I na figura abaixo são congruentes (pelo caso de congruência LAL), bem como os dois indicados por II (pelo caso de congruência LLL). Logo, a área branca é igual a 2 triângulos I mais 1 triângulo II, e a área sombreada também é igual a 2 triângulos I mais 1 triângulo II. Assim, a área sombreada é igual à área em branco e, logo, cada uma delas é igual à metade da área do retângulo. Portanto, a razão entre a área da região sombreada e a área do retângulo é igual a $\frac{1}{2}$.



Exercício 8 (Questão 13 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):
A figura abaixo foi feita com quatro quadrados de 10 cm de lado. Os vértices A, B e C são também centros dos quadrados correspondentes. Qual é a área da região sombreada?

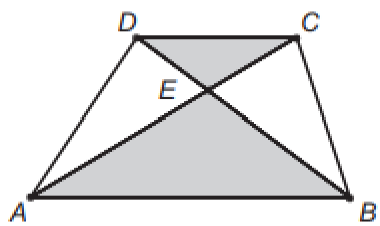


Para resolver essa questão, precisamos saber qual é a área coberta de cada um dos três quadrados de centros A, B e C. Para isso, vamos considerar a figura abaixo, onde representamos os quadrados de centros A e B. A área coberta no quadrado de centro A é o polígono sombreado $AQRT$.

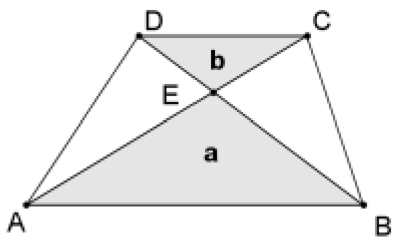


Pelo ponto A traçamos as perpendiculares AP e AS aos lados do quadrado. Como A é o centro do quadrado, é imediato que $APRS$ é um quadrado; sua área é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior, ou seja, é igual a $\frac{1}{4} \times 10^2 = 25$ cm^2. Além disso, os ângulos $\widehat{PAQ}$ e $\widehat{SAT}$, marcados na figura, são iguais. De fato, temos $\widehat{PAQ} = \widehat{PAS} - \widehat{QAS} = 90° - \widehat{QAS} = \widehat{QAT} - \widehat{QAS} = \widehat{SAT}$. Logo, os triângulos APQ e AST são congruentes, pelo caso de congruência ALA, já que $\widehat{PAQ} = \widehat{SAT}$, $AP = AS = 5$ cm e $\widehat{APQ} = \widehat{AST} = 90°$. Assim, área$(AQRT)$ = área(AST) + área$(AQRS)$ = área(APQ) + área$(AQRS)$ = área$(APRS) = 25$ cm^2. Do mesmo modo, as áreas cobertas nos quadrados de centros B e C são iguais a 25 cm^2. Assim, a área da figura é igual a $3 \times (100 - 25) + 100 = 325$ cm^2.

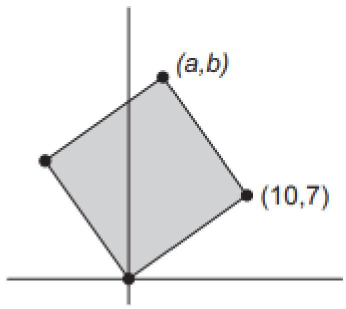
Exercício 9 (Questão 12 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2012):
A figura mostra um trapézio $ABCD$ de bases AB e CD; o ponto E é o ponto de interseção de suas diagonais. Os triângulos ABE e CDE têm áreas a e b, respectivamente. Qual é a área do trapézio?



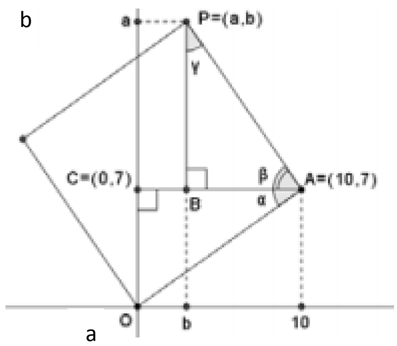
Vamos denotar por (ABC) a área do triângulo ABC, e analogamente para outros triângulos. Primeiro observamos que $(ABD) = (ABC)$, pois esses triângulos têm o lado AB em comum e a mesma altura relativa a esse lado. Logo, $(AED) = (ABD) - (ABE) = (ABC) - (ABE) = (BCE)$, ou seja, os triângulos AED e BCE têm a mesma área, que denotamos por x. Por outro lado, como os triângulos AED e ECD têm a mesma altura relativa aos lados AE e EC, temos $\frac{x}{b} = \frac{(AED)}{(DCE)} = \frac{AE}{EC}$ e, analogamente, $\frac{a}{x} = \frac{(ABE)}{(BCE)} = \frac{AE}{EC}$. Logo, $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, donde $x = \sqrt{ab}$. Finalmente, a área do trapézio é dada por $a + 2x + b = a + \sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.



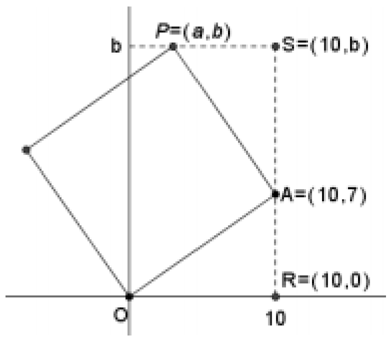
Exercício 10 (Questão 6 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):
O quadrado da figura abaixo tem um vértice na origem, outro no ponto $(10,7)$ e um terceiro no ponto (a,b). Qual é o valor de $a+b$?



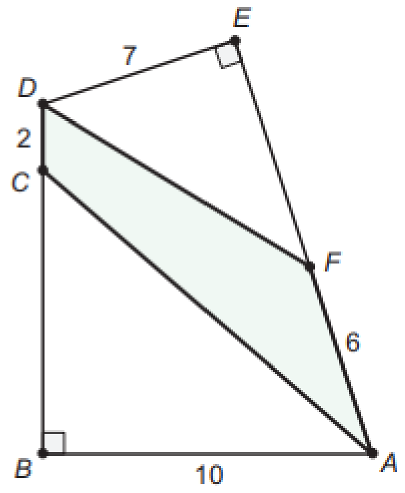
Sejam O a origem, A o ponto $(10,7)$ e P o ponto (a,b). Traçando por A uma paralela ao eixo x e por P uma paralela ao eixo y, determinamos os pontos B e C como na figura abaixo. Como $A=(10,7)$, temos $AC=10$ e $OC=7$. Além disso, $OA=AP$. Denotamos por α, β e γ as medidas dos ângulos destacados. Observamos agora que, como o ângulo $\widehat{OAP}$ é reto, temos $\alpha+\beta=90°$. Por outro lado, como o triângulo ABP é retângulo em B, temos $\beta+\gamma=90°$. Segue que $\alpha=\gamma$ e, portanto, $\widehat{AOC}=\beta$. Logo, os triângulos OAC e APB são congruentes, pelo caso de congruência ALA, já que $AO=AP$, $\alpha=\gamma$ e $\widehat{AOC}=\beta$. Concluímos que $AB=OC=7$ e $BP=AC=10$, donde $a=10-7=3$ e $b=7+10=17$. Logo, $a+b=3+17=20$.



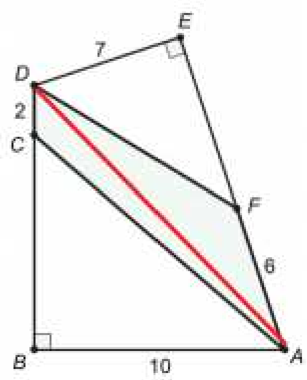
Outra solução usa a figura abaixo. Os triângulos ORA e ASP são congruentes, por argumentos semelhantes aos da primeira solução. Segue que $AS=OR=10$ e $PS=AR=7$. Logo, $a=3$ e $b=17$, donde $a+b=20$.



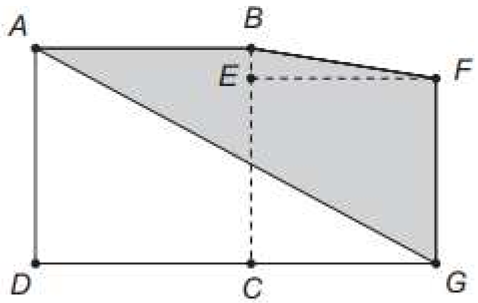
Exercício 11 (Questão 8 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2016):
Na figura abaixo, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AE do quadrilátero $ABDE$, respectivamente. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero $ACDF$?



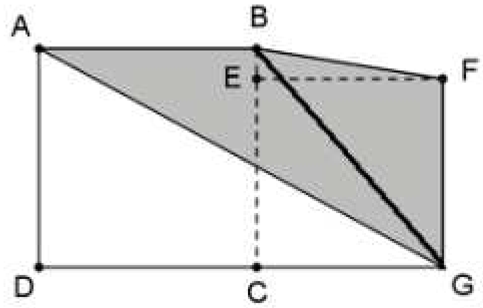
A área do quadrilátero $ACDF$ é a soma das áreas dos triângulos ACD e ADF. No triângulo ACD, tem-se $CD = 2$ e altura $AB = 10$ relativa a CD, enquanto no triângulo ADF, tem-se $FA = 6$ e altura $DE = 7$ relativa a FA. Logo, a área do triângulo ACD é $\frac{2\times10}{2} = 10$ e a área do triângulo ADF é $\frac{6\times7}{2} = 21$. Somando essas áreas, obtemos que o quadrilátero $ACDF$ tem área igual a 31.



Exercício 12 (Questão 5 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):
Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGC$ são quadrados de áreas R e S, respectivamente. Qual é a área da região cinza?



O lado do quadrado maior é $\sqrt{R}$ e o lado do menor é $\sqrt{S}$. Traçamos o segmento BG (veja a figura abaixo) e vemos que ele divide a região cinza em dois triângulos, ABG e BFG, cujas áreas, somadas, dão a área da região cinza. A área do triângulo ABG é $\frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R}}{2} = \frac{R}{2}$ e a área do triângulo BFG é $\frac{\sqrt{S}\cdot\sqrt{S}}{2} = \frac{S}{2}$. Logo, a área da região cinza é $\frac{R+S}{2}$.



<u>Outra solução</u>:

Construímos o triângulo BFH congruente ao triângulo BEF e denotamos por X a área de cada um deles (veja a figura abaixo). Se a área da região cinza é Y, observamos que $Y + X = \text{Área}(AGH) = \frac{\text{Área}(ADGH)}{2} = \frac{R+S+2X}{2}$, donde $Y = \frac{R+S}{2}$.