Material Teórico - Módulo Progressões Geométricas

Progressões Geométricas: Definição e Lei de Formação

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Progressões geométricas

Continuando nosso estudo de sequências de números reais, apresentamos, neste material, uma classe particular importante, formada pelas *progressões geométricas*.

Uma **progressão geométrica**, ou abreviadamente **PG**, é qualquer sequência de números reais (finita ou infinita), dada por uma recorrência do tipo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = q \cdot a_k,\ \forall k \geq 1 \end{cases},$$

onde a e q são números reais dados. O número q é chamado **razão** da PG.

Observe que, se uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ tem todos os seus termos não nulos, então tal sequência é uma PG se, e só se,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots.$$

Ademais, sendo esse o caso, o valor comum das igualdades acima é precisamente a razão da PG.

A título de exemplos, a sequência das potências de 2 com expoentes inteiros e não negativos, $(1, 2, 4, \ldots)$, assim como a sequência das potências de $\frac{1}{2}$ com expoentes inteiros e não negativos, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$, são PGs de razões respectivamente iguais a 2 e $\frac{1}{2}$.

Mais geralmente, dado um número real p, a sequência $(1, p, p^2, \ldots)$, formada pelas potências de p com expoentes inteiros e não negativos, é uma PG de razão p. Realmente, basta observar que

$$\frac{p}{1} = \frac{p^2}{p} = \frac{p^3}{p^2} = \ldots = \frac{p^{k+1}}{p^k} = \ldots = p.$$

Costumamos classificar uma PG $(a_k)_{k\geq 1}$ como:

(i) **Estacionária**, se $a_k = 0$, $\forall k > 1$ e $a_1 \neq 0$.

(ii) **Constante**, se $a_{k+1} = a_k$, $\forall k \geq 1$.

(iii) **Oscilante**, se cada termo tem sinal contrário ao sinal do termo imediatamente anterior.

(iv) **Crescente**, se $a_{k+1} > a_k$, $\forall k \geq 1$.

(v) **Decrescente**, se $a_{k+1} < a_k$, $\forall k \geq 1$.

Tal classificação pode ser expressa em termos do primeiro termo a_1 e da razão q da PG. De fato:

(i)' Se $a_1 \neq 0$, então, como $a_2 = qa_1$, temos $a_2 = 0 \Leftrightarrow q = 0$. Mas, sendo esse o caso, temos claramente $a_k = 0$ para todo $k > 1$.

(ii)' Se $a_1 = 0$, então a PG é constante, independentemente do valor de q. Se $a_1 \neq 0$, então para a PG ser constante é necessário que $q \neq 0$ (pois, caso fosse $q = 0$, já vimos que ela seria estacionária). Por outro lado, sendo $a_1, q \neq 0$, temos $(a_k)_{k\geq 1}$ constante se, e só se, $q = 1$. Isto porque $a_1, q \neq 0$ implicam $a_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$ e, daí,

$$a_{k+1} = a_k \Leftrightarrow a_k q = a_k \Leftrightarrow q = 1.$$

(iii)' Para a PG ser oscilatória, devemos ter $a_k a_{k+1} < 0$ para todo $k \geq 1$. Mas, como $a_{k+1} = qa_k$, isso é o mesmo que $qa_k^2 < 0$ para todo $k \geq 1$; então, como $a_k^2 \geq 0$ sempre, temos $qa_k^2 < 0$ se, e só se, $q < 0$.

(iv)' A PG não pode ser crescente se $a_1 = 0$ (nesse caso, já vimos que ela seria constantemente igual a 0), nem tampouco se $a_1 \neq 0$ mas $q = 0$ (quando ela seria estacionária) ou $a_1 \neq 0$ e $q < 0$ (quando ela seria oscilatória). Então, a fim de que ela seja crescente, devemos ter $a_1 \neq 0$ e $q > 0$. Consideremos, pois, dois casos separadamente:

(a) $a_1 > 0$ e $q > 0$: é fácil ver que $a_k > 0$ para todo $k \geq 1$. Portanto,

$$a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow qa_k > a_k \Leftrightarrow q > 1.$$

(b) $a_1 < 0$ e $q > 0$: é fácil ver que $a_k < 0$ para todo $k \geq 1$. Portanto,

$$a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow qa_k > a_k \Leftrightarrow 0 < q < 1.$$

2 A lei de formação de uma PG

A proposição abaixo fornece uma importante fórmula para a continuidade do estudo das PGs, conhecida como a **fórmula do termo geral** de uma PG.

Proposição 1. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PG de razão q. Então, vale:*

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1},\ \forall k \geq 1. \tag{1}$$

Prova. Se $a_1 = 0$ ou $q = 0$, é claro que $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, $\forall k \geq 1$. (Verifique esta afirmação!) Por outro lado, se $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, então nossa discussão da classificação das PGs deixa claro que $a_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$. Sendo esse o caso, podemos escrever:

$$\frac{a_2}{a_1} = q,$$
$$\frac{a_3}{a_2} = q,$$
$$\frac{a_4}{a_3} = q,$$
$$\ldots,$$
$$\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} = q,$$
$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q.$$

Multiplicando as igualdades acima membro a membro, obtemos

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\cdot\frac{a_k}{a_{k-1}}=\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{k-1\text{ vezes}}=q^{k-1}.$$

Efetuando os cancelamentos possíveis no primeiro membro, chegamos finalmente a

$$\frac{a_k}{a_1}=q^{k-1},$$

expressão que equivale a (1). □

Seguem algumas aplicações simples da fórmula acima:

Exemplo 2. *Calcule o 10^o termo da PG $(1, 2, 4, \ldots)$.*

Solução. A razão da PG é dada por $q=\frac{2}{1}=2$. Aplicando a fórmula para o termo geral, fornecida pela proposição anterior, obtemos:

$$a_{10}=a_1\cdot q^{10-1}=1\cdot 2^9=512.$$

□

Exemplo 3. *Os números a, b, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, c, d, e, f formam, nessa ordem, uma PG. Calcule o valor do termo f.*

Solução. Como os números em questão formam uma PG, temos:

$$q=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}\cdot 3=\frac{1}{3}.$$

Daí, utilizando a fórmula do termo geral para o termo $\frac{1}{9}$, que é o quarto termo da PG, obtemos:

$$\frac{1}{9}=a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}\Rightarrow a=3.$$

Aplicando mais uma vez a fórmula do termo geral, agora para o oitavo termo f, obtemos:

$$f=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{8-1}=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}.$$

□

Exemplo 4. *Encontre os números reais a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7, tais que a sequência*

$$(1280, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, 10)$$

seja uma PG.

Solução. Observe que queremos encontrar uma PG cujo primeiro termo é 1280 e cujo oitavo termo é 10. Para tanto, vamos aplicar a fórmula para o termo geral de uma PG, a fim de calcular sua razão:

$$\begin{aligned}a_8=a_1\cdot q^{8-1}&\Rightarrow 10=1280\cdot q^7\\&\Rightarrow q^7=\frac{10}{1280}=\frac{1}{128}\\&\Rightarrow q=\sqrt[7]{\frac{1}{128}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, os números reais procurados são

$$a_2=1280\cdot\frac{1}{2}=640,\quad a_3=640\cdot\frac{1}{2}=320,$$

$$a_4=320\cdot\frac{1}{2}=160,\quad a_5=160\cdot\frac{1}{2}=80,$$

$$a_6=80\cdot\frac{1}{2}=40\ \text{ e }\ a_7=40\cdot\frac{1}{2}=20.$$

□

3 Taxas de crescimento

Dada uma PG $(a_k)_{k\geq 1}$ de termos positivos e razão (também positiva) q, gostaríamos de calcular o crescimento ou decrescimento percentual de um termo para o termo seguinte. Genericamente, dois termos consecutivos da PG são a_k e a_{k+1}, de forma que o *incremento* de a_k para a_{k+1} é igual a $a_{k+1}-a_k$. Em relação a a_k (i.e., em termos percentuais), tal incremento foi de

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k}=\frac{a_{k+1}}{a_k}-\frac{a_k}{a_k}=q-1. \tag{2}$$

Em particular, o incremento percentual não depende dos termos consecutivos escolhidos, de forma que podemos definir a **taxa de crescimento** da PG em questão como o número i dado por

$$i=q-1.$$

Uma vez que $a_1, q>0$, temos

$$i>0\Leftrightarrow q>1\Leftrightarrow a_{k+1}>a_k$$

para todo $k\geq 1$. Da mesma forma,

$$i<0\Leftrightarrow 0<q<1\Leftrightarrow a_{k+1}<a_k$$

para todo $k\geq 1$. Portanto, apesar de seu nome, a taxa de crescimento da PG acima fornece o crescimento percentual, se $q>1$, e o decrescimento percentual, se $0<q<1$, de um termo para o termo seguinte da PG.

Por exemplo, a PG $(1, 2, 4, \ldots)$, que possui razão igual a 2, tem taxa de crescimento igual a $i=2-1$, ou seja, $i=100\%$. Por outro lado, a PG $(100, 80, 64, \ldots)$ possui razão $q=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$ e taxa de crescimento $i=\frac{4}{5}-1=-\frac{1}{5}$, ou seja, $i=-20\%$. Por fim, a PG $(4, 4, 4, \ldots)$ possui razão igual a 1 e taxa de crescimento $i=1-1=0$, ou seja, $i=0\%$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5. *A população de certa cidade é de dois milhões de habitantes e decresce* 5% *a cada dez anos. Qual será a população dessa cidade daqui a* 30 *anos?*

Solução. Observe que estamos interessados em estimar a população da cidade depois de 3 períodos de 10 anos. Como, $i = -5\% = -0,05$, o nosso interesse é encontrar o quarto termo da PG

$$(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

que tem primeiro termo igual a 2.000.000 e razão $q = 1 + i = 1 - 0,05 = 0,95$. Portanto, mais uma vez invocando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$a_4 = a_1 \cdot 0,95^3 = 2.000.000 \cdot 0,857375 = 1.714.750.$$

□

A noção de taxa de crescimento é particularmente importante para a análise de situações envolvendo *juros compostos*, isto é, juros que incidem periodicamente, a uma taxa constante i, sobre um montante. Mais precisamente, suponha que empatamos um capital C em uma aplicação financeira que rende uma taxa percentual i de juros mensais. Após o primeiro mês, o montante de que disporemos passou de C a

$$C + i \cdot C = (i+1)C;$$

concluído o segundo mês, teremos agora

$$(i+1)C + i \cdot (i+1)C = (i+1)^2C.$$

Prosseguindo com o raciocínio acima, é fácil perceber que os valores de que disporemos serão, mês a mês, sucessivamente iguais a

$$C, (1+i)C, (1+i)^2C, (1+i)^3C, \ldots,$$

sequência que é uma PG de razão $1 + i$. Portanto, a taxa de crescimento dessa PG é igual a

$$(1+i) - 1 = i,$$

isto é, coincide com a taxa percentual de juros cobrados.

Exemplo 6. *João pediu a uma amigo um empréstimo de R\$* $100.000,00$ *com juros de* 20% *ao ano, para começar a pagar em cinco anos. Qual será a sua dívida após esse período?*

Solução. Observe que $i = 20\% = 0,2$. Logo, a PG formada pelos valores devidos por João ao amigo ao final de cada ano possui razão dada por $q = 1 + i = 1 + 0,2 = 1,2$. Veja também que estamos procurando o sexto termo da PG

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6),$$

cujo primeiro termo representa o valor do empréstimo e a_k representa o valor devido depois de $k - 1$ anos. Portanto, utilizando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$a_6 = a_1 \cdot 1,2^5 = 100.000 \cdot 2,48832 = 248.832,$$

isto é, a dívida de João será de R\$ $248.832,00$ após 5 anos. □

Exemplo 7. *Um automóvel novo custa* 54 *mil reais e depois de* 3 *anos de uso passa a custar* 16 *mil reais. Supondo que o valor do automóvel decresça a uma taxa anual constante (conhecida como* taxa de depreciação*, calcule o valor do automóvel após* 1 *ano de uso.*

Solução. Denotaremos (x_1, x_2, x_3, x_4) a PG em que cada x_k representa o valor do automóvel após $k - 1$ anos, para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Temos, então, $x_1 = 54.000$ e $x_4 = 16.000$. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$\begin{aligned} x_4 = x_1q^3 &\Rightarrow 16.000 = 54.000 \cdot q^3 \\ &\Rightarrow q^3 = \frac{16.000}{54.000} = \frac{8}{27} \\ &\Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor do automóvel após 1 ano de uso é:

$$a_2 = a_1q = 54.000 \cdot \frac{2}{3} = 36.000.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para discutir cada uma das seções que compõem este material. O principal objetivo da classificação das PGs, discutida na Seção 1, é simplesmente acostumar os alunos à definição e a manipulações algébricas simples com PGs. Na Seção 2, antes de mostrar a fórmula do termo geral de uma PG qualquer, tente fazer com que os alunos a descubram por meios próprios, fazendo alguns exemplos numéricos simples. Na seção 3, evidencie como problemas envolvendo taxas de crescimento aparecem na vida cotidiana dos alunos.

As referências colecionadas a seguir contém muitos exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.

3. E. Lima, P. Carvalho, E. Wagner, A. Morgado, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*, 5ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2004.