Material Teórico - Módulo Progressões Geométricas

Progressões Geométricas: Soma dos Termos de uma PG Finita

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A soma dos termos de uma PG finita

Continuando o nosso estudo de PGs, apresentamos a fórmula abaixo, conhecida como fórmula da **soma dos termos de uma PG finita**.

Proposição 1. *Seja* $(a_k)_{k\geq 1}$ *uma PG de razão* $q\neq 1$. *Então:*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}. \qquad (1)$$

Antes de iniciar a prova da proposição 1, provaremos o seguinte resultado auxiliar:

Lema 2. *Se* $q\neq 1$ *é um número real, então:*

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Prova do lema. É suficiente provar que

$$(q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})=q^n-1.$$

Para tanto, efetuando os produtos do primeiro membro e, em seguida, fazendo os cancelamentos possíveis, obtemos:

$$\begin{aligned}(q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})&=\\ &=\cancel{q}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\ldots+\cancel{q^{n-1}}+q^n\\ &\quad -1-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\ldots-\cancel{q^{n-2}}-\cancel{q^{n-1}}\\ &=q^n-1.\end{aligned}$$

□

Primeira prova da proposição 1. Utilizando a fórmula do termo geral de uma PG, obtemos:

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\ldots+a_n&=a_1+a_1\cdot q+\ldots+a_1\cdot q^{n-1}\\ &=a_1(1+q+\ldots+q^{n-1}).\end{aligned}$$

Agora, utilizando o resultado do lema 2 e, em seguida, novamente a fórmula para o termo geral, vem que:

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\ldots+a_n&=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\\ &=\frac{a_1\cdot q^n-a_1}{q-1}\\ &=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}.\end{aligned}$$

□

A demonstração da proposição 1 deixa claro que vale a seguinte fórmula alternativa para a soma dos termos de uma PG finita:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (2)$$

A utilização desta última fórmula é, por vezes, mais adequada, porque ela é dada em função do primeiro termo, do número de termos somados e da razão, ao passo que, para utilizar a fórmula dada na proposição 1, precisamos calcular primeiro o último termo da soma.

A seguir, apresentamos um argumento ligeiramente diferente para justificar (1), o qual será útil mais adiante (cf. Exemplo 8).

Segunda prova da proposição 1. Denotando

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n,$$

temos

$$\begin{aligned}qS&=q(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n)\\ &=qa_1+qa_2+qa_3+\ldots+qa_{n-1}+qa_n\\ &=a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+a_{n+1}.\end{aligned}$$

Utilizando as duas expressões acima para calcular $(q-1)S=qS-S$, temos

$$\begin{aligned}(q-1)S&=qS-S\\ &=(\cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\cancel{a_4}+\ldots+\cancel{a_n}+a_{n+1})\\ &\quad-(a_1+\cancel{a_2}+\cancel{a_3}+\ldots+\cancel{a_{n-1}}+\cancel{a_n})\\ &=a_{n+1}-a_1.\end{aligned}$$

Logo, $(q-1)S=a_{n+1}-a_1$, expressão que equivale a (1). □

Daremos, agora, alguns exemplos utilizando as fórmulas apresentadas acima.

Exemplo 3. *Qual é a soma dos* 8 *primeiros termos da PG* $(4,12,36,\ldots)$*?*

Solução. Iniciamos, notamos que a razão da PG é $q=\frac{12}{4}=3$. Em seguida, utilizando a fórmula alternativa (2) para a soma dos termos de uma PG finita, e denotando por S a soma dos 8 primeiros termos da PG $(4,12,36,\ldots)$, obtemos:

$$\begin{aligned}S&=a_1\cdot\frac{q^8-1}{q-1}=4\cdot\frac{3^8-1}{3-1}\\ &=4\cdot\frac{6561-1}{2}=2\cdot 6560=13.120.\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Calcule a soma dos termos da PG*

$$(5,15,45,\ldots,10.935).$$

Solução. Antes de aplicar a fórmula para a soma dos termos de uma PG, dada pela proposição 1, precisamos encontrar o termo que sucede 10.935 na PG. Para tanto, perceba que a razão q da PG vale $q = \frac{15}{5} = 3$, e assim o termo que sucede 10.935 é $10.935 \cdot 3 = 32.805$. Portanto,

$$\begin{aligned} 5 + 15 + 45 + \ldots + 10.935 &= \frac{32.805 - 5}{3 - 1} \\ &= \frac{32800}{2} \\ &= 16.400. \end{aligned}$$

□

No exemplo anterior, observe que fizemos o cálculo desejado sem ter a menor ideia da quantidade n de termos da PG. Contudo, se quisermos calculá-la, basta observar que

$$10.935 = a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1}.$$

Portanto,

$$3^{n-1} = \frac{10.935}{5} = 2.187 = 3^7$$

e, assim, $n = 8$.

Exemplo 5. *Se $S_3 = 38$ e $S_4 = 65$ são, respectivamente, as somas dos três e dos quatro primeiros termos de uma PG cujo termo inicial é 8, encontre a soma dos 6 primeiros termos.*

Solução. Denotando a progressão geométrica em questão por $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, temos:

$$S_4 - S_3 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + a_3) = a_4.$$

Portanto, $a_4 = 65 - 38 = 27$.

Por outro lado, utilizando a fórmula do termo geral para o termo a_4, podemos encontrar a razão q da PG:

$$\begin{aligned} 27 = a_4 = a_1 \cdot q^3 = 8 \cdot q^3 &\Rightarrow q^3 = \frac{27}{8} \\ &\Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por fim, aplicando a fórmula da soma dos termos, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{6} a_k = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} &= 8 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ &= 8 \frac{\frac{729}{64} - 1}{\frac{1}{2}} = \cancel{16} \cdot \frac{665}{\cancel{64}} \\ &= \frac{665}{4}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6. *Mostre que*

$$\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ algarismos}} = \frac{10^k - 1}{9}, \forall k \geq 1.$$

Solução. Note que

$$\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ algarismos}} = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{k-1}.$$

Agora, a expressão numérica que aparece do lado direito da equação acima é a soma dos termos da PG $(1, 10, 10^2, \ldots, 10^{k-1})$, cuja razão é 10 e cuja soma é

$$\frac{10^{(k-1)+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{9}.$$

□

Exemplo 7. *Calcule o valor da soma de 100 parcelas dada abaixo:*

$$S = 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots1.$$

Solução. Vimos no exemplo anterior que

$$\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ algarismos}} = \frac{10^k - 1}{9}, \forall k \geq 1.$$

Aplicando essa fórmula a cada uma das cem parcelas de S, reagrupando os termos assim obtidos e, em seguida, aplicando novamente a fórmula para a soma dos termos de uma PG finita, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots1 \\ &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^{100}-1}{9} \\ &= \frac{10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{100}}{9} - \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{9}\right)}_{100 \text{ parcelas}} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{10^{101} - 10}{10 - 1} - \frac{100}{9} \\ &= \frac{10^{101} - 10}{81} - \frac{900}{81} \\ &= \frac{10^{101} - 910}{81}. \end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir é bastante importante, pois mostra que a ideia utilizada na segunda demonstração que apresentamos para a fórmula da soma dos termos de uma PG finita pode, por vezes, ser adaptada a outros tipos de sequências. No caso do exemplo em questão, a sequência

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{5}{2^3}, \ldots, \frac{99}{2^{50}}\right)$$

é uma **progressão aritmético-geométrica** (abreviamos *PAG*), isto é, uma sequência $(a_k)_{k\geq1}$ tal que, para cada natural k, temos $a_k = b_k c_k$, onde $(b_k)_{k\geq1}$ é uma PA e $(c_k)_{k\geq1}$ é uma PG. (No caso da PAG acima, temos $b_k = 2k - 1$ e $c_k = \frac{1}{2^k}$, para $1 \leq k \leq 50$.)

Exemplo 8. *Calcule o valor da soma*

$$S=\sum_{k=1}^{50}\frac{2k-1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{99}{2^{50}}.$$

Solução. Começamos multiplicando S pela razão da PG envolvida na PAG dada (no caso, $\frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{99}{2^{50}}\right)\\&=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{99}{2^{51}}.\end{aligned}$$

Em seguida, subtraímos membro a membro as igualdades

$$S=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{99}{2^{50}}$$

e

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{99}{2^{51}},$$

e reagrupamos as parcelas assim obtidas de acordo com as potências de $\frac{1}{2}$ envolvidas, para escrever

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=S-\frac{S}{2}\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)\\&\quad+\ldots+\left(\frac{99}{2^{50}}-\frac{97}{2^{50}}\right)-\frac{99}{2^{51}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots+\frac{2}{2^{50}}-\frac{99}{2^{51}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{49}}-\frac{99}{2^{51}}.\end{aligned}$$

Agora, observe que a soma dos termos da PG

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{2^{49}}\right),$$

que possui razão $\frac{1}{2}$, é igual a:

$$\frac{\frac{1}{2^{49}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2^{50}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=1-\frac{1}{2^{49}}.$$

Substituindo esse resultado na última expressão acima para $\frac{S}{2}$, chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^{49}}\right)-\frac{99}{2^{51}}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{49}}-\frac{99}{2^{51}}\\&=\frac{3\cdot2^{50}-2^2-99}{2^{51}}\\&=\frac{3\cdot2^{50}-103}{2^{51}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$S=2\cdot\frac{S}{2}=\frac{3\cdot2^{50}-103}{2^{50}}.$$

□

Observamos que a técnica utilizada na solução do exemplo anterior pode ser facilmente adaptada para calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n}a_k$$

dos n primeiros termos de uma PAG $(a_k)_{k\geq1}$ em termos dos primeiros termos e das razões da PA e da PG. Isto é feito em [1], por exemplo.

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir o conteúdo deste material. Procure fazer alguns exemplos de somas de poucos termos em PG antes de abordar a fórmula geral da proposição 1. Aproveite a ocasião e saliente a importância do lema 2 como ferramenta para fatorações.

As referências colecionadas a seguir contém muitos exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas*. São Paulo, Atual Editora, 2012.

3. E. Lima, P. Carvalho, E. Wagner, A. Morgado, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*, 5ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2004.