Aluno: ____

Professora: Fabiana Rodrigues

Exercício 7 (Questão 9 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):
Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Para formar o número de um dos bilhetes comprados por Marcelo, inicialmente deve-se decidir como dispor o algarismo sete no número. Há 4 maneiras de tomar essa decisão, pois o número do bilhete é de uma das seguintes formas: $777X$, $77X7$, $7X77$ ou $X777$, sendo que X representa um algarismo diferente de zero e 7. Uma vez tomada essa primeira decisão, deve-se, afinal, tomar a decisão de escolher o algarismo restante. Essa última decisão pode ser tomada de 8 maneiras, uma vez que o algarismo restante deve ser diferente de zero e 7. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de bilhetes comprados por Marcelo é $8 \times 4 = 32$.

Exercício 8 (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007):
Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Manuela pode começar decidindo qual das paredes pintará de azul. Como há 4 paredes, há 4 maneiras de tomar essa decisão. Uma vez tomada essa decisão, ela deve decidir qual cor usará para pintar a parede oposta. Como só poderá pintar a parede oposta de verde ou branco, há 2 maneiras de tomar essa decisão. Uma vez tomada essa decisão, ela deve decidir qual cor usará para pintar uma das paredes ainda não pintadas. Como há 2 cores ainda não usadas, há 2 maneiras de tomar essa decisão. Uma vez tomada essa decisão, por fim, ela deve decidir qual cor usará para pintar a última parede. Como só restou uma cor ainda não usada, há apenas 1 maneira de tomar essa decisão. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de Manuela pintar o seu quarto é $4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16$.

Exercício 9 (Questão 17 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):
Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Como dois vértices do pentágono definem um segmento de reta, há um total de $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ segmentos de reta. Uma figura consiste de 2 destes segmentos de reta, e escolhas distintas de dois segmentos de reta correspondem a figuras distintas. Assim, o número de figuras distintas é igual a $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Exercício 10 (Questão 17 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

Temos dois casos a analisar: (a) Ana recebe dois presentes ou (b) Ana recebe apenas a boneca. No caso (a), Ana recebe a boneca e Tio João deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes (que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai ganhar o último (1 escolha). Pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. No caso (b), Tio João deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e as outras duas apenas um. O Tio João deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso, ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ($4 \times 3 = 12$ escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $3 \times 12 \times 1 = 36$ maneiras diferentes. No total, pelo Princípio Aditivo, Tio João pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.

Exercício 11 (Questão 9 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2011):
Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

Pelo Princípio Multiplicativo, com os números 1, 4, 6 e 8 podem-se formar $4 \times 3 \times 2 = 24$ números de três algarismos distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e, por fim, 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos 1, 4, 6 e 8, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $24 \div 4 = 6$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $6 \times (1 + 4 + 6 + 8) = 114$, a soma desses 24 números será $114 + 10 \times 114 + 100 \times 114 = 111 \times 114 = 12654$.

Exercício 12 (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):
Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

Vamos dividir os possíveis horários de Ana em dois casos: (1) se ela tem aula aos sábados e (2) se ela não tem aula aos sábados.
No caso (1), ela deve escolher sua aula de sábado (3 possibilidades) e depois sua aula à tarde (2 possibilidades) em algum dia de segunda a quinta (4 possibilidades). Temos então $3 \times 2 \times 4 = 24$ horários possíveis nesse caso.
No caso (2), ela deve escolher dois dias não consecutivos da semana (6 possibilidades), escolher um deles para ter aula pela manhã (2 possibilidades; automaticamente, no outro dia escolhido ela terá

aula à tarde), escolher seu horário da manhã (3 possibilidades) e seu horário da tarde (2 possibilidades). Temos então $6 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$ horários possíveis nesse caso.

No total, Ana tem $24 + 72 = 96$ horários possíveis para fazer suas aulas com as restrições do enunciado.