<u>Tarefa de casa 1</u> (Prova OBMEP 2006 – 2ª Fase – N3 – Questão 1)

Raimundo e Macabéa foram a um restaurante que cobra R$ 1,50 por cada 100 gramas de comida para aqueles que comem ate 600 gramas e R$ 1,00 por cada 100 gramas para aqueles que comem mais de 600 gramas.

(a) Quanto paga quem come 350 gramas? E quem come 720 gramas?

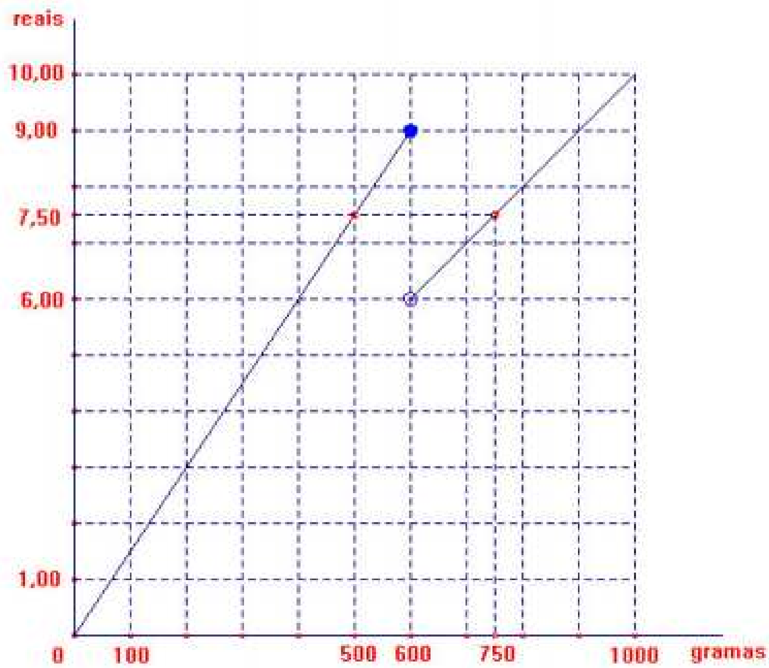
Como 350 gramas é igual a $3{,}5 \times 100$ gramas e $350 < 600$, então quem come 350 gramas paga $3{,}5 \times 1{,}50 = 5{,}25$ reais, ou seja 5 reais e 25 centavos. Por outro lado, temos 720 gramas é igual a $7{,}2 \times 100$ gramas. Como $720 > 600$, então quem come 720 gramas paga $7{,}2 \times 1{,}00 = 7{,}20$ reais, ou seja 7 reais e 20 centavos

(b) Raimundo consumiu 250 gramas mais que Macabéa, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quanto cada um deles pagou?

Como Raimundo comeu 250 gramas a mais que Macabéa e ambos pagaram a mesma quantia, concluímos que Raimundo pagou menos por grama de comida do que Macabéa. Logo, Raimundo comeu mais de 600 gramas e Macabéa comeu no máximo 600 gramas. Vamos chamar de r e m o peso, em gramas, da comida que Raimundo e Macabéa consumiram, respectivamente. Então, Raimundo pagou $\frac{r}{100} \times 1{,}00 = 0{,}01r$ reais e Macabéa pagou $\frac{m}{100} \times 1{,}50 = 0{,}015m$ reais. Como ambos pagaram a mesma quantia, temos $0{,}01r = 0{,}015m$, e o enunciado nos diz que $r = m + 250$. Assim, temos o sistema formado pelas equações $0{,}01r = 0{,}015m$ e $r = m + 250$, donde tiramos $0{,}015m = 0{,}01(m + 250) = 0{,}01m + 2{,}5$, e segue que $0{,}005m = 2{,}5$, ou seja, $m = 500$ gramas. Segue que $r = m + 250 = 750$ gramas. Para saber quanto eles pagaram, basta calcular, por exemplo, quanto Macabéa pagou: ela comeu 500 gramas, logo pagou $0{,}015m = 0{,}015 \times 500 = 7{,}50$ reais, tendo Raimundo pago a mesma quantia.

(c) Desenhe o gráfico que representa o valor a ser pago em função do peso da comida. Marque nesse gráfico os pontos que representam a situação do item (b).

Chamando de $p(x)$ o preço pago por quem come x gramas de comida, temos $p(x) = 0{,}15x$, se $x \leq 600$, e $p(x) = 0{,}01x$, se $x > 600$. Logo, o gráfico é formado por duas semirretas, uma passando pelos pontos $(0, 0)$ e $(600, 9)$ e a outra pelos pontos $(600, 6)$ e $(1000, 10)$, não incluindo o ponto $(600, 6)$. Macabéa comeu $x = 500$ gramas e pagou 7,50 reais, o que está representado no gráfico pelo ponto $(500, 7{,}5)$. Raimundo comeu 750 gramas e pagou o mesmo que Macabéa, o que está representado pelo ponto $(750, 7{,}5)$.



<u>Tarefa de casa 2</u> (Prova OBMEP 2007 – 2ª Fase – N3 – Questão 1 – itens a e c)

A calculadora do Dodó tem uma tecla especial com o símbolo ⌁. Se o visor mostra um número x diferente de 2, ao apertar ⌁ aparece o valor de $\frac{2x-3}{x-2}$.

(a) Se o Dodó colocar 4 no visor e apertar ⌁, qual número vai aparecer?

Se o Dodó colocar um número $x \neq 2$ no visor e apertar ⌁, aparece o valor de $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$. Logo, para $x = 4$, o valor que vai aparecer é $f(4) = \frac{2\times 4-3}{4-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

(b) Dodó percebeu que, colocando o 4 no visor e apertando ⌁ duas vezes, aparece de novo o 4; da mesma forma, colocando o 5 e apertando ⌁ duas vezes, aparece de novo o 5. O mesmo vai acontecer para qualquer número diferente de 2? Explique.

Seja $b \neq 2$ o número que o Dodó colocou no visor. Ao apertar ⌁ duas vezes, aparece o número $f\big(f(b)\big) = \frac{2f(b)-3}{f(b)-2} = \frac{2\frac{2b-3}{b-2}-3}{\frac{2b-3}{b-2}-2} = \frac{\frac{4b-6-3b+6}{b-2}}{\frac{2b-3-2b+4}{b-2}} = b$.

É importante notar que o Dodó pode apertar ⌁ uma segunda vez. De fato, a equação $f(b) - 2 = 0$ não tem solução, ou seja, o denominador da expressão após o primeiro sinal de igualdade acima é sempre diferente de 0. De fato, se existisse b tal que $f(b) - 2 = 0$, teríamos $\frac{2b-3}{b-2} = 2$ e, portanto, $-3 = -4$, um absurdo. Logo, ao apertar ⌁ nunca aparece o 2 no visor, e é sempre possível apertar ⌁ uma segunda vez.

<u>Tarefa de casa 3</u> (Prova OBMEP 2007 – 2ª fase – N3 – Questão 5)

O Grêmio Estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$ $6{,}00$. Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

- os ingressos serão numerados a partir do número 1 e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
- ao final da festa, cada participante receberá R$ $0{,}01$ para cada ingresso

vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

(a) Se forem vendidos 100 ingressos, quanto vai receber, ao final da festa, a pessoa que comprou o ingresso com o número 1? E a que comprou o ingresso com o número 70?

Após o ingresso de número 1 foram vendidos $100 - 1 = 99$ ingressos. Logo quem comprou o primeiro ingresso receberá $99 \times 0{,}01 = 0{,}99$ reais. Do mesmo modo, após o ingresso de número 70 foram vendidos $100 - 70 = 30$ ingressos, logo quem comprou esse ingresso receberá $30 \times 0{,}01 = 0{,}30$ reais.

(b) Qual será o lucro do Grêmio se forem vendidos 100 ingressos?

Com os ingressos de número 1 e 100, o Grêmio tem um lucro de $(6 - 99 \times 0{,}01) + (6 - 0 \times 0{,}01) = 11{,}01$ reais. Com os ingressos de números 2 e 99, o lucro será de $(6 - 98 \times 0{,}01) + (6 - 1 \times 0{,}01) = 11{,}01$ reais e assim por diante, com os ingressos de números 3 e 98, 4 e 97, ..., 50 e 51, num total de 49 pares, cada um dando ao Grêmio um lucro de R$11,01. Logo o lucro do Grêmio será de $50 \times 11{,}01 = 550{,}50$ reais. Notamos que essa solução é baseada na ideia usada para demonstrar a conhecida fórmula para a soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética.

(c) Quantos ingressos o Grêmio deve vender para ter o maior lucro possível?

1ª solução: Podemos pensar que o comprador do ingresso de número n paga ao Grêmio R$ $6{,}00$, e que desses R$ $6{,}00$ o Grêmio vai retirar R$ $0{,}01$ para cada um dos compradores anteriores. Logo o lucro do Grêmio com o ingresso de número n é

$$f(n) = 6 - (n-1) \times 0{,}01 = 6{,}01 - 0{,}01 \times n.$$

(notamos que essa expressão não depende do número de ingressos vendidos). Segue que o lucro do Grêmio por ingresso diminui de R$ $0{,}01$ a cada ingresso vendido (ou seja, a função f é decrescente). Além disso, seu lucro com a venda de dos ingressos aumenta enquanto ele não tiver prejuízo (isto é, lucro negativo) com algum ingresso. Como o lucro do Grêmio com o ingresso de número 601 é $f(601) = 6{,}01 - 0{,}01 \times 601 = 0$ reais e a função f é decrescente, vemos que o lucro do Grêmio é positivo para todos os ingressos de número menor que 601, e negativo para todos os ingressos de número maior que 601. Logo, o lucro do Grêmio será o maior possível quando forem vendidos 600 (ou 601) ingressos.

2ª solução: O comprador do último ingresso não recebe nada de volta, ou seja, o Grêmio vai lucrar R$ $6{,}00$ com seu ingresso; o comprador do penúltimo ingresso recebe R$ 0,01 de volta, logo o Grêmio vai lucrar R$ 5,99 com seu ingresso. Desse modo, o lucro do Grêmio com a venda dos ingressos é

$$6{,}00 + 5{,}99 + 5{,}98 + \cdots + (\text{lucro com o ingresso } 1)$$

e segue que esse lucro cresce enquanto o lucro com o ingresso de número 1 for positivo. O lucro com o ingresso número 1 é $6 - (x - 1) \times 0{,}01$ reais, onde x é o número de ingressos vendidos. A equação $6 - (x - 1) \times 0{,}01 = 0$ tem raiz $x = 601$, logo o lucro com o ingresso de número 1 é positivo se $x < 601$. Desse modo o lucro máximo será atingido quando o Grêmio vender 600 ingressos (ou 601, visto que o ingresso de número 601 dá lucro de 0 reais).