Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

Proporções e Conceitos Relacionados

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

Na aula anterior, aprendemos que uma razão é uma medida relativa entre duas grandezas. Por exemplo, se em uma sala de aula há 11 meninos e 12 meninas, a razão entre meninos e meninas será $11 : 12$; por outro lado, se em uma outra sala existirem 22 meninos e 24 meninas, a razão entre meninos e meninas nesta segunda sala também será $11 : 12$, pois ao simplificarmos a fração $\frac{22}{24}$ obtemos $\frac{11}{12}$.

Com este exemplo, é possível perceber que duas ou mais frações podem representar um mesmo número. Neste caso específico, temos:

$$\frac{22}{24} = \frac{11}{12}.$$

Definição 1.1

Dizemos que duas razões com termos não-nulos, $a : b$ e $c : d$, formam uma **proporção** quando as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ forem equivalentes, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Representamos esta proporção como

$$a : b = c : d$$

e lemos "a está para b assim como c está para d".

Por exemplo, $2 : 3$ e $4 : 6$ formam uma proporção, pois

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Dessa forma, dizemos que 2 está para 3 assim como 4 está para 6.

Alternativamente, dizemos que a quádrupla (a, b, c, d) é **diretamente proporcional** quando $a : b = c : d$. Um caso particular ocorre quando os dois elementos centrais de uma quádrupla proporcional são iguais. Neste caso, dizemos tratar-se de uma **proporção contínua**. Por exemplo, $(4, 6, 6, 9)$ é uma proporção contínua, uma vez que

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}.$$

2 Multiplicação em x

Um método prático para decidir se duas razões são proporcionais é utilizar a regra da **multiplicação em xis** (**x**). Essa regra decorre do fato de que a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é equivalente à igualdade

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

(uma vez que b e d são ambos não-nulos) ou, o que é o mesmo, a $ad = bc$. Portanto, a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é equivalente a

$$ad = bc,$$

sendo essa última igualdade obtida multiplicando os *extremos* a, d e os *meios* b, c. Por exemplo, temos $2 : 3 = 4 : 6$, uma vez que $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$.

Em palavras, diz-se usualmente que, "*em uma proporção, o produto dos meios deve ser igual os produto dos extremos.*"

Exemplo 1. *Destaque, nos itens a seguir, as razões que são porporcionais a* $3 : 4$*:*

a) $6 : 8$.

b) $8 : 10$.

c) $15 : 20$.

d) $9 : 16$.

Solução. Para verificarmos quais razões são porporcionais, faremos o teste da multiplicação em xis:

a) $3 \cdot 8 = 24 = 4 \cdot 6$. Portanto, $6 : 8$ e $3 : 4$ são proporcionais.

b) $3 \cdot 10 = 30 \neq 32 = 4 \cdot 8$. Portanto, $8 : 10$ e $3 : 4$ não são proporcionais.

c) $3 \cdot 20 = 60 = 4 \cdot 15$. Portanto, $15 : 20$ e $3 : 4$ são proporcionais.

d) $3 \cdot 16 = 48 \neq 36 = 4 \cdot 9$. Portanto, $9 : 16$ e $3 : 4$ não são proporcionais.

□

Exemplo 2. *Verifique se as quádruplas a seguir são porporcionais:*

a) $(5, 6, 7, 8)$.

b) $(2, 5, 10, 25)$.

Solução.

a) Uma vez que $5 \cdot 8 \neq 6 \cdot 7$, temos que a quádrupla $(5, 6, 7, 8)$ não é proporcional.

b) Como $2 \cdot 25 = 5 \cdot 10$, segue que a quádrupla $(2, 5, 10, 25)$ é proporcional.

□

3 Aplicação: figuras semelhantes

Um exemplo prático de aplicação de proporções em nosso dia-a-dia está nas figuras semelhantes. Observe que qualquer foto de uma pessoa é simplesmente uma representação proporcional da fisionomia real, porém em menor escala.

Dessa forma, se Pedro tem $10cm$ de cabelo e $3cm$ de barba e em uma de suas fotos sua barba tem $1cm$, é possível calcular a medida de seu cabelo nesta foto resolvendo a equação obtida pela proporção entre as medidas reais e as respectivas medidas na foto.

Mais precisamente, se x é o tamanho do cabelo de Pedro na foto, temos que

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{x}$$

Multiplicando em xis, obtemos:

$$3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \cong 3,34.$$

Um outro exemplo prático onde encontramos a utilização de proporções é na confecção de mapas. Nesse caso, usualmente encontramos escrito no mapa a **escala** em que o mesmo foi confeccionado, isto é, a proporção entre as distâncias no mapa e as distâncias reais.

Para exemplificar, suponha que em um mapa com escala de $1cm : 100km$, a distância entre duas cidades A e B seja igual a $23cm$. Uma vez que cada $1cm$ no mapa corresponde a $100km$ na realidade, utilizando proporções podemos calcular facilmente a distância real entre as duas cidades como sendo de $2300km$. De fato, denotando por x a distância real (em km) entre as duas cidades, temos

$$\frac{1cm}{100km} = \frac{23cm}{xkm} \Rightarrow 1 \cdot x = 23 \cdot 100 \Rightarrow x = 2300.$$

4 Algumas definições úteis

Nesta seção, aprenderemos algumas definições que são baseadas no conceito de proporcionalidade e cujo uso é frequente em livros e exames.

Definição 4.1

Dados números a e b, ambos diferentes de zero, chamamos **terceira proporcional** entre a e b (nessa ordem) o número x que verifica a proporção contínua

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Por exemplo, a terceira proporcional dos números 4 e 6 é o valor x tal que $\frac{4}{6} = \frac{6}{x}$. Aplicando a regra da multiplicação em xis, obtemos:

$$4x = 36 \Longrightarrow x = 9.$$

Definição 4.2

Dados números a, b e c, todos diferentes de zero, chama-se **quarta proporcional** entre a, b e c (nessa ordem) o número x que verifica a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

À guisa de ilustração, considere os números 4, 6 e 8. A quarta proporcional entre eles (nessa ordem) é o valor x tal que $\frac{4}{6} = \frac{8}{x}$. Multiplicando em xis e resolvendo a equação assim obtida, encontramos facilmente $x = 12$.

Observe que, em ambos os casos acima, a ordem em que os números são considerados é importante. Realmente, no exemplo dado na terceira proporcional, se calculássemos a terceira proporcional x entre 6 e 4, obteríamos

$$\frac{6}{4} = \frac{4}{x} \Rightarrow 6x = 16 \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Da mesma forma, a quarta proporcional y entre 6, 4 e 8, nessa ordem, é tal que

$$\frac{6}{4} = \frac{8}{x} \Rightarrow 6x = 32 \Rightarrow x = \frac{16}{3}.$$

Definição 4.3

Dados os números positivos a e b, chamamos **média geométrica** entre a e b o número positivo x que verifica a proporção contínua

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Para resolver a equação anterior em x, começamos multiplicando em xis para obter $x^2 = ab$, de sorte que x é precisamente a raiz quadrada de ab:

$$x = \sqrt{ab}.$$

Note que, como $ab = ba$, a ordem em que consideramos a e b não afeta o cálculo de sua média geométrica.

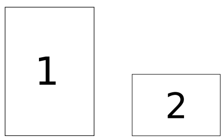
Por exemplo, a média geométrica de 20 e 5 é

$$x = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10.$$

5 Exemplos

Finalizaremos este material discutindo alguns exemplos para fixar os conceitos que foram apresentados até aqui.

Exemplo 3. *Amanda deve fazer dois retângulos de papel proporcionais para um trabalho da escola. O primeiro recorte deve ter* 50cm *de altura e o segundo recorte deve ter* 32cm *de comprimento. Além disso, o comprimento do primeiro retângulo deve ser igual à altura do segundo. Calcule este valor.*



Solução. Seja x o valor (em cm) a ser descoberto. De acordo com as informações apresentadas, temos a seguinte proporção:

$$\frac{50}{x} = \frac{x}{32}.$$

Ou seja, x deve ser a média geométrica entre 50 e 32. Portanto,

$$x = \sqrt{50 \cdot 32} = \sqrt{1600} = 40.$$

$\square$

Exemplo 4. *Uma operadora de telefonia móvel oferece um plano que consiste de uma tarifa fixa (que é paga independente do uso) mais um valor por cada minuto utilizado. No mês de janeiro, Carla utilizou seu celular por* 12 *minutos e pagou* 27 *reais. Em fevereiro, utilizou* 15 *minutos e pagou* 33 *reais. Qual é o valor pago por cada minuto e qual é a tarifa fixa desse plano?*

Solução. Sendo x o valor da tarifa fixa, temos que, em janeiro, Carla pagou $27-x$ pelos 12 minutos utilizados. Por outro lado, em fevereiro, ela pagou $33-x$ pelos 15 minutos utilizados. Uma vez que um mesmo valor é cobrado por cada minuto utilizado, os cálculos acima nos fornecem a proporção

$$\frac{27-x}{12} = \frac{33-x}{15}.$$

Simplificando um fator 3 dos denominadores, obtemos a igualdade mais simples

$$\frac{27-x}{4} = \frac{33-x}{5}.$$

Multiplicando em xis, obtemos

$$5(27-x) = 4(33-x)$$

ou, ainda,

$$135 - 5x = 132 - 4x.$$

Logo, $x = 3$.

Por fim, se a tarifa fixa custa 3 reais, o preço por minuto utilizado é (como vimos acima)

$$\frac{27-3}{12} = \frac{24}{12} = 2.$$

$\square$

O aluno também pode resolver o exemplo anterior utilizando um raciocínio mais elementar, como o apresentado a seguir:

Solução. Observe que, de um mês para o outro, houve um acréscimo de $15 - 12 = 3$ minutos utilizados, o que correspondeu a um acréscimo de $33 - 27 = 6$ reais na conta. Isso significa que cobra-se $\frac{6}{3} = 2$ reais por cada minuto. (Veja que, aqui, utilizamos o conceito de proporcionalidade: *se três minutos correspondem a seis reais, então um minuto corresponderá a dois reais.*)

Dessa forma, no primeiro mês foram cobrados $12 \cdot 2 = 24$ reais pelos minutos que Carla utilizou o telefone. Portanto, a tarifa fixa é $27 - 24 = 3$ reais. $\square$

Exemplo 5. *Dois copos de suco, de mesmos volumes, foram feitos a partir de uma mistura de água e polpa de fruta. No primeiro copo, a razão entre a polpa e a água utilizadas foi igual a* $1:2$*, enquanto no segundo copo esta mesma razão foi de* $3:4$*. Ao misturarmos estes dois copos em uma jarra, qual será a razão entre polpa e água?*

Solução. Suponha que o volume de cada copo seja x. Segundo o enunciado, no primeiro copo, o volume de polpa será $\frac{x}{3}$ e o volume de água $\frac{2x}{3}$. No segundo copo, o volume de polpa será $\frac{3x}{7}$ e o volume de água $\frac{4x}{7}$. Ao misturarmos os dois copos teremos um volume de polpa igual a

$$\frac{x}{3} + \frac{3x}{7} = \frac{7x}{21} + \frac{9x}{21} = \frac{16x}{21}.$$

Além disso, teremos um volume de água igual a

$$\frac{2x}{3} + \frac{4x}{7} = \frac{14x}{21} + \frac{12x}{21} = \frac{26x}{21}.$$

Por fim, calculando a razão entre os volumes de polpa e de água encontrados acima, obtemos:

$$\frac{\frac{16x}{21}}{\frac{26x}{21}} = \frac{16x}{21} \cdot \frac{21}{26x} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}.$$

Portanto, depois de misturarmos os dois copos de suco na jarra, a razão entre a polpa e a água será $8 : 13$. $\square$

Exemplo 6. *Em uma empresa,* 500 *funcionários são capazes de produzir* 18000 *peças por semana. Se o gerente desta empresa decidir abrir uma filial com* 75 *funcionários, mantendo o mesmo nível de produtividade, quantas peças a mais serão produzidas?*

Solução. Denotemos por x a quantidade de peças extras que serão produzidas pela filial. Como a produtividade será mantida, concluímos que as razões entre os números de funcionários e os totais produzidos pela matriz e pela filial são proporcionais. Dessa forma, $(500, 18000, 75, x)$ será uma quádrupla proporcional, a partir da qual encontramos a seguinte equação:

$$\frac{500}{18000} = \frac{75}{x}.$$

Multiplicando em xis, obtemos:

$$\begin{aligned} 500x = 75 \cdot 18000 &\Rightarrow 5x = 75 \cdot 180 \Rightarrow x = 15 \cdot 180 \\ &\Rightarrow x = 2700. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *Em uma conferência científica, a razão entre cientistas brasileiros e estrangeiros era de* $7 : 9$*. Se havia* 80 *pessoas nessa reunião, quantos eram os brasileiros?*

Solução 1. Observe que, de cada 16 cientistas, sete são brasileiros e nove são estrangeiros. Portanto, a proporção de cientistas brasileiros na conferência era de $\frac{7}{16}$. Como havia 180 cientistas ao todo, concluímos que a quantidade de brasileiros era

$$\frac{7}{\cancel{16}} \cdot \cancel{80} = 7 \cdot 5 = 35.$$

$\square$

Outra solução um pouco mais técnica é a seguinte:

Solução 2. Se a razão entre cientistas brasileiros e estrangeiros era de $7 : 9$, isso significa que (e aí temos a utilização da ideia de proporção), se tivéssemos $7x$ brasileiros, teríamos $9x$ estrangeiros, totalizando $7x + 9x = 16x$ pessoas. Por outro lado, se havia um total de 80 pessoas, então devemos ter $16x = 80$, ou seja, $x = 5$. Dessa forma, o número de brasileiros era $5 \cdot 7 = 35$. $\square$

Sugestões ao Professor

Reserve dois encontros de 50 minutos cada para expor o conteúdo desta aula. No primeiro encontro, apresente as definições e conceitos presentes nas seções de 1 a 4. No segundo encontro, resolva os exemplos apresentados na seção 5. Lembre-se de sempre dar algum tempo para os alunos desenvolverem suas próprias soluções antes de discutir aquelas apresentadas no texto.

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com