Exercício 1:

Use o algoritmo de Euclides para calcular $mdc(372,162)$, e use-o para escrever $mdc(372,162) = 372x + 162y$, para algum inteiro x e algum inteiro y.

(*Obs.*: o procedimento usado para expressar $mdc(372,162)$ como $mdc(372,162) = 372x + 162y$ pode ser realizado de maneira análoga para quaisquer dois inteiros não ambos nulos a e b de forma que, dados inteiros a e b não ambos nulo, existem inteiros x e y tais que $mdc(a,b) = ax + by$. Esta igualdade é conhecida como *Relação de Bézout*).

Aplicando o algoritmo da divisão euclidiana, obtemos

$$372 = 162 \times 2 + 48$$
$$162 = 48 \times 3 + 18$$
$$48 = 18 \times 2 + 12$$
$$18 = 12 \times 1 + 6$$
$$12 = 6 \times 2 + 0$$

Aplicando o Lema de Euclides à primeira equação acima, obtemos

$$mdc(372,162) = mdc(162,372 - 162 \times 2) = mdc(162,48).$$

Aplicando novamente o Lema de Euclides utilizando as outras igualdades acima:

$$mdc(162,48) = mdc(48,18) = mdc(18,12) = mc(12,6) = mdc(6,0) = 6.$$

O processo acima é chamado de algoritmo de Euclides para encontrar o mdc. Podemos utilizar as igualdades iniciais para encontrar os valores de x e y.

$$18 - 12 \times 1 = 6.$$

Como $12 = 48 - 18 \times 2$, temos $6 = 18 - (48 - 18 \times 2) \times 1 = 18 \times 3 - 48$. Utilizando agora a outra igualdade $18 = 162 - 48 \times 3$, obtemos $6 = (162 - 48 \times 3) \times 3 - 48 = 162 \times 3 - 48 \times 10$. Finalmente, de $48 = 372 - 162 \times 2$, obtemos

$$6 = 162 \times 3 - (372 - 162 \times 2) \times 10 = 162 \times 23 - 372 \times 10.$$

Logo, $x = -10$ e $y = 23$ é uma solução da equação dada.

Observe que aplicando este processo a qualquer par de números inteiros, obtemos a bem conhecida relação de bezout: Dados os inteiros a e b, existe um par de inteiros (x,y) tal que $ax + by = mdc(a,b)$.

Exercício 2:

Sejam a, b e c número inteiros tais que a divide bc e $mdc(a,b) = 1$. Prove que a divide c.

(*Dica*: Use a relação de Bézout).

Como $mdc(a,b) = 1$, pela relação de Bezout existem inteiros x, y tais que $ax + by = 1$. Multiplicando a relação por c obtemos $acx + bcy = c$. Como a divide acx e bcy, conclui-se que a divide c.

Exercício 3 (Questão 15 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):

Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $N/3$, $N/4$, $N/5$, $N/6$ e $N/7$ sejam todos números inteiros?

Para que $N/3$, $N/4$, $N/5$, $N/6$ e $N/7$ sejam todos números inteiros, N deve ser múltiplo comum de 3, 4, 5, 6 e 7. Como queremos o menor inteiro positivo N possível, ele dever ser o mínimo múltiplo comum (MMC) de 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja, $N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$.

Exercício 4 (Problema SJ3.9 – Círculo Matemático de Moscou):
Considere todos os inteiros com nove algarismos distintos (em base decimal), todos diferentes de 0. Encontre o mdc de todos eles.

Entre esses números encontramos os números 987654321 e 987654312, que diferem por 9, de modo que o mdc divide 9. Por outro lado, a soma dos algarismos de todos esses números, $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$, é múltiplo de 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, todos esses números são múltiplos de 9. Logo a resposta é 9.

Exercício 5 (Problema 53 – Capítulo 3 – Seçaõ 4 – Círculos Matemáticos – A Experiência Russa):
Encontre o mdc dos números $2n+13$ e $n+7$.

Pelo algoritmo de Euclides, obtemos
$$\begin{aligned} mdc(2n+13, n+7) &= mdc\big(n+7, 2n+13-(n+7)\big) = mdc(n+7, n+6) \\ &= mdc\big(n+6, n+7-(n+6)\big) = mdc(n+6, 1) = 1. \end{aligned}$$

Exercício 6 (Problema 54 – Capítulo 3 – Seçaõ 4 – Círculos Matemáticos – A Experiência Russa):
Prove que a fração $\frac{12n+1}{30n+2}$ é irredutível para qualquer inteiro n.

Pelo algoritmo de Euclides, temos
$$\begin{aligned} mdc(12n+1, 30n+2) &= mdc\big(12n+1, 30n+2-2(12n+1)\big) = mdc(12n+1, 6n) \\ &= mdc\big(6n, 12n+1-2(6n)\big) = mdc(6n, 1) = 1. \end{aligned}$$
Em outras palavras $12n+1$ e $30n+2$ não possuem fator comum, isto é, $\frac{12n+1}{30n+2}$ é irredutível.

Exercício 7:
Encontre todos os pares ordenados (a, b), com a e b inteiros positivos, tais que $mdc(a, b) = 15$ e $mmc(a, b) = 150$.

Como $mdc(a, b) = 15$, existem inteiros positivos x e y tais que $a = 15x$ e $b = 15y$ tais que $mdc(x, y) = 1$. Assim,
$$150 = mmc(a, b) = mmc(15x, 15y) = 15 \cdot mmc(x, y) = 15xy.$$
Daí $xy = 10$. Os valores possíveis do par (x, y) são $(1,10)$, $(2,5)$, $(5,2)$ e $(10,1)$. Em todos esses casos temos $mdc(x, y) = 1$. Assim, todos os pares ordenados procurados são
$$(15,150), (30,75), (75,30), (150,15).$$

Exercício 8 (Problema 16.2 – Círculos de Matemática da OBMEP – Modificada):

Em 2018 foi realizada a edição 40 da OBM, e $mdc(2018,40) = 2$. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?

Note que se estivermos na edição de número x da OBM, estaremos no ano $1978 + x$. Assim, estamos interessados no maior valor possível de $mdc(x, 1978 + x)$, mas veja que isso é o mesmo que calcular o $mdc(x, 1978 + x - x) = mdc(x, 1978)$. O maior valor possível para esse mdc é 1978, que pode ser atingido tomando $x = 1978$.

Exercício 9 (Problema 16.4 – Círculos de Matemática da OBMEP):
O mmc de 12, 15, 20 e k é 420. Qual é o menor valor inteiro positivo de k?

Veja que $12 = 2^2 \times 3$, $15 = 3 \times 5$, $20 = 2^2 \times 5$ e $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$. Como $mmc(12,15,20,k) = 420$ e a fatoração de 420 é feita com as maiores potências de primos dos números 12, 15, 20 e k, temos que os fatores 2, 3 e 5 já estão com as potências certas, falta apenas 7, portanto $k = 7$.

Exercício 10 (Problema 16.5 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Senhor Namm assou 252 biscoitos, senhora Clancy assou 105 biscoitos e senhor Palavas assou 168 biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?

O número que queremos deve ser um divisor simultâneo dos três números de biscoitos, como queremos o maior número de biscoitos, estamos procurando o $mdc(252,105,168)$. Temos $mdc(252,105) = mdc(105,252 - 2 \times 105) = mdc(105,42) = mdc(42,105 - 2 \times 42) = mdc(42,21) = 21$. Como $168 = 21 \times 8$, temos $mdc(252,105,168) = 21$.

Exercício 11 (Problema 16.7 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Carlinhos escreve números inteiros positivos diferentes e menores do que 1000 em várias bolas e coloca-as numa caixa, de modo que Mariazinha possa pegar ao acaso duas dessas bolas. Quantas bolas no máximo Carlinhos irá colocar na caixa se os números das duas bolas deverão ter um divisor comum maior do que 1?

São 499. Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o mdc entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

Exercício 12 (Problema 16.9 – Círculos de Matemática da OBMEP):
Qual é o maior valor possível do mdc de dois números distintos pertencentes ao conjunto $1,2,3, \dots ,2011$?

O mdc de dois números é divisor de cada um dos dois números, ou seja, cada um dos números é múltiplo do seu mdc. Logo, queremos o maior valor de d que tem dois múltiplos positivos menores ou iguais a 2011. O maior dos dois múltiplos de d é maior ou igual a $2d$, logo $2d \leq 2011 \Leftrightarrow d \leq 1005$. Como 1005 e $2 \times 1005 = 2010$ são ambos menores do que 2011, o valor procurado é 1005.