Material Teórico - Módulo Progressões Aritméticas

PAs Inteiras e Soma dos Termos de uma PA

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A soma dos termos de uma PA

Começamos este material calculando a soma dos termos de uma PA finita. Nesse sentido, a fórmula colecionada na proposição abaixo é conhecida como a **fórmula da soma dos k primeiros termos** de uma PA.

Para seu enunciado, é conveniente introduzirmos a notação

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1}$$

para denotar a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (ou simplesmente a_1, quando $n = 1$). Aqui, a letra grega maiúscula Σ (lê-se *sigma*) corresponde ao nosso S (de *soma*), de sorte que (1) denota a soma dos termos a_k, com k variando de 1 a n.

Proposição 1. *Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, então:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \forall n \geq 1.$$

Prova. Se $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Por outro lado, escrevendo os mesmos termos na ordem inversa, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1.$$

Somando membro a membro as duas igualdades acima, chegamos a

$$2S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Agora, utilizando o resultado da Proposição 8 do material teórico da aula anterior, obtemos (quer seja n par ou ímpar):

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\Longrightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

□

Uma maneira alternativa de expressar a fórmula acima para a soma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é obtida substituindo a expressão para o termo geral da PA. Assim,

$$a_1 + a_n = a_1 + \big(a_1 + (n-1)r\big) = 2a_1 + (n-1)r,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2} \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)r}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

A seguir, discutimos algumas aplicações das fórmulas acima para a soma dos termos de uma PA.

Exemplo 2. *Calcule a soma dos quinze primeiros termos da PA $(3, 7, 11, \ldots)$.*

Solução. Observe que $a_1 = 3$ e $r = 7 - 3 = 4$. Agora, pela observação feita logo após a Proposição 1, temos:

$$\begin{aligned} S_{15} &= 15a_1 + \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot r \\ &= 15 \cdot 3 + \frac{15 \cdot \cancel{14}}{\cancel{2}} \cdot 4 = \\ &= 45 + 15 \cdot 7 \cdot 4 \\ &= 45 + 420 = 465. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Calcule a soma dos n primeiros números ímpares.*

Solução. Queremos calcular a soma S_n, dos n primeiros termos da PA $(1, 3, 5, \ldots)$. Como $a_1 = 1$ e $r = 3 - 1 = 2$, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

e, daí,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + (2n-1))n}{2} = \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2.$$

Alternativamente, utilizando uma vez mais a fórmula alternativa para S_n, deduzida logo após a prova da proposição anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r \\ &= n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \\ &= n + n(n-1) = n^2. \end{aligned}$$

□

Revisitemos o Exemplo 11 do material teórico da aula anterior.

Exemplo 4. *Mostramos, abaixo, as quatro primeiras linhas de uma tabela infinita, formada por números naturais, onde, para $i > 1$, a linha i começa à esquerda por um número duas unidades maior que aquele que inicia a linha $i-1$, e tem dois números a mais que a linha $i-1$. Calcule a soma dos números escritos na centésima linha.*

1						
3	5	7				
5	7	9	11	13		
7	9	11	13	15	17	19

Solução. Como no material da aula anterior, a primeira coluna forma uma PA $(a_k)_{k\geq 1}$, de termo inicial 1 e razão 2. Portanto, seu termo inicial é

$$a_{100} = a_1 + (100-1)\cdot 2 = 1 + 198 = 199.$$

Agora, as quantidades de termos das linhas, 1, 3, 5, 7, ..., também formam uma PA de termo inicial 1 e razão 2, de sorte que a centésima linha também tem 199 termos.

A centésima linha é, pois, uma PA (b_k) de 199 termos, com termo inicial 199 e razão também 2. Logo, (2) fornece

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{199} &= 199\cdot b_1 + \frac{199(199-1)\cdot 2}{2} \\ &= 199^2 + 199\cdot 198 = 79003. \end{aligned}$$

□

2 Progressões aritméticas de termos inteiros

Se uma PA $(a_k)_{k\geq 1}$ é tal que $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}$, então, pela fórmula do termo geral, temos

$$a_n = a_1 + (n-1)r \in \mathbb{Z},$$

uma vez que o produto e a soma de números inteiros ainda são inteiros. Em palavras, se o primeiro termo e a razão de uma PA forem números inteiros, então todos os seus termos também o serão.

Reciprocamente, se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA cujos elementos são todos inteiros, então temos que $r = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$. De fato, para que uma PA $(a_k)_{k\geq 1}$ seja formada somente por inteiros, é necessário e suficiente que ela possua dois termos consecutivos inteiros (verifique este fato!). Abaixo seguem alguns exemplos que tratam de PAs formadas por termos inteiros.

Exemplo 5. *Quantos são os múltiplos positivos de 13 menores do que 1000? Quanto vale sua soma?*

Solução. Os múltiplos positivos de 13 menores do que 1000 formam a PA

$$13, 26, 39, 52, \ldots, 13n,$$

onde $13n$ é o maior múltiplo de 13 que é menor ou igual a 1000. Agora,

$$13n \leq 1000 \Longleftrightarrow n \leq \frac{1000}{13}.$$

Dividindo 1000 por 13, obtemos:

$$1000 = 76\cdot 13 + 12,$$

de forma que o maior múltiplo de 13 que é menor ou igual a 1000 é $13\cdot 76 = 988$. Portanto, há 76 múltiplos positivos de 13 menores do que 1000.

Para calcular a soma $S = 13 + 26 + \cdots + 988$, utilizamos a fórmula para a soma dos termos de uma PA:

$$S = \frac{(13+988)76}{2} = 1001\cdot 38 = 38038.$$

□

O próximo exemplo é uma variação do anterior.

Exemplo 6. *Quantos são os múltiplos de 7 compreendidos entre 1000 e 2000? Quanto vale a soma dos mesmos?*

Solução. Como no exemplo anterior, os múltiplos positivos de 7 formam a PA

$$7, 14, 21, 28, \ldots, 7n, \ldots.$$

Como $7n \geq 1000 \Leftrightarrow n \geq \frac{1000}{7}$ e

$$1000 = 142\cdot 7 + 6,$$

concluímos que o menor múltiplo de 7 que é maior ou igual a 1000 é $7\cdot 143 = 1001$.

Por outro lado, temos também $7n \leq 2000 \Leftrightarrow n \leq \frac{2000}{7}$, e

$$2000 = 285\cdot 7 + 5;$$

portanto, $7\cdot 285 = 1995$ é o maior múltiplo de 7 que é menor ou igual a 2000.

Os cálculos acima garantem que queremos calcular a soma

$$S = 7\cdot 143 + 7\cdot 144 + \cdots + 7\cdot 285,$$

na qual, há $285 - 143 + 1 = 143$ parcelas. Podemos calcular S novamente com o auxílio da fórmula para a soma dos termos de uma PA. Pondo o fator 7 em evidência por simplicidade, obtemos:

$$\begin{aligned} S &= 7\cdot(143 + 144 + \cdots + 285) \\ &= 7\cdot\frac{(143+285)\cdot 143}{2} \\ &= 214214. \end{aligned}$$

□

No próximo exemplo, o fato de que os termos da PA são inteiros é utilizado de forma decisiva.

Exemplo 7. *A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética de números naturais. Infelizmente, ele esqueceu qual era o termo inicial e a razão. As únicas informações das quais ele lembrava eram que os termos da progressão não eram consecutivos, o primeiro termo era um múltiplo da razão e*

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 207.$$

Quanto vale o termo que João teria que calcular?

Solução. Aplicando a fórmula do termo geral de uma PA várias vezes, a primeira igualdade acima se transforma em:

$$(a_1 + 3r) + (a_1 + 6r) + (a_1 + 9r) = 207 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3a_1 + 18r = 207$$

ou, o que é o mesmo,

$$a_1 + 6r = 69. \tag{3}$$

Como o primeiro termo é um múltiplo da razão, podemos escrever $a_1 = mr$, para algum natural m. Portanto,

$$69 = a_1 + 6r = mr + 6r = (m+6)r$$

e, daí, r divide 69. Como $69 = 3 \cdot 23$, devemos ter $r = 1$, 3, 23 ou 69. Por outro lado, como os termos da PA não são consecutivos, devemos ter $r > 1$. Por fim, uma vez que tais termos são naturais, devemos ter $a_1 = 69 - 6r > 0$, o que descarta as possibilidades $r = 23$ ou 69. Assim, $r = 3$ e, daí,

$$a_1 = 69 - 6r = 69 - 6 \cdot 3 = 51.$$

Segue da fórmula para o termo geral que

$$a_{11} = a_1 + 10r = 51 + 10 \cdot 3 = 81.$$

□

Exemplo 8. *Dois números inteiros são chamados* ***primanos*** *quando pertencem a uma progressão aritmética de números primos com pelo menos três termos. Por exemplo, os números 41 e 59 são primanos, pois pertencem à progressão aritmética $(41, 47, 53, 59)$, a qual contém somente números primos. Assinale a alternativa com dois números que* ***não*** *são primanos.*

(a) 7 *e* 11.

(b) 13 *e* 53.

(c) 41 *e* 131.

(d) 31 *e* 43.

(e) 23 *e* 41.

Solução. Veja que as sequências

$$(3, 7, 11); \quad (41, 71, 101, 131);$$

$$(31, 37, 43) \quad \text{e} \quad (23, 41, 59)$$

são PAs formadas por números primos. Portanto, 7 e 11, 41 e 131, 31 e 43, 23 e 41 são pares de números primanos.

Por outro lado, se os números primos 13 e 53 pertencessem a uma PA formada somente por números primos, teríamos que a razão r dessa PA deveria ser um divisor da diferença $40 = 53 - 13$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $r > 0$. Daí temos as possibilidades: $r = 1$, $r = 2$, $r = 4$, $r = 5$, $r = 8$, $r = 10$, $r = 20$ ou $r = 40$. Entretanto, é fácil checar que, em qualquer um dos casos acima, apareceriam termos compostos (i.e., não primos). Façamos algumas de tais verificações:

(i) $r = 2$: $13 + 2 = 15$, composto.

(ii) $r = 4$: $13+4 = 17$ é primo, mas $17+4 = 21$ é composto.

(iii) $r = 10$: $13 + 10 = 23$ é primo, mas $23 + 10 = 33$ é composto. □

Falando um pouco mais sobre progressões aritméticas que contêm números primos, a PA dos números ímpares $(1, 3, 5, \ldots)$ contém infinitos números primos, pois o conjunto dos números primos é infinito e o único número primo par é o 2.

O próximo exemplo mostra que nenhuma PA infinita e não constante de naturais pode ser composta inteiramente por primos.

Exemplo 9. *Se $(a, a + r, a + 2r, \ldots)$ é uma PA infinita e não constante de naturais, prove que pelo menos um de seus termos é composto.*

Prova. Podemos escrever o termo geral da PA como $a + (n-1)r$. Como a PA é não constante, temos $r > 0$. Por outro lado, como ela é infinita e seus termos são todos naturais, temos $a + (n-1)r > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, não podemos ter $r < 0$, pois, se esse fosse o caso, teríamos $a + (n-1)r < 0$ para n suficientemente grande. Logo, $r > 0$.

Agora, basta mostrarmos que, dados $a, r \in \mathbb{N}$, é possível escolher n de forma que $a + (n-1)r$ seja composto. Para tanto, veja que, se $n = 2a + 1$, então

$$a + (n-1)r = a + 2ar = a(1 + 2r).$$

Esse número é composto se $a > 1$, mas pode ser primo se $a = 1$. Entretanto, se $a = 1$, então $a + r > 1$, e podemos repetir o argumento acima escolhendo $n = 2(a + r) + 2$. Veja:

$$\begin{aligned} a + (n-1)r &= (a + r) + (n-2)r \\ &= (a + r) + 2(a + r) \\ &= 3(a + r), \end{aligned}$$

o qual é composto. □

Apesar do exemplo anterior, trazemos ao conhecimento do leitor o seguinte resultado, devido a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemão que viveu durante o século XIX:

Teorema 10. *Sejam a e r números naturais primos entre si, isto é, tais que* $\text{mdc}(a, r) = 1$*. Então, a PA infinita*

$$(a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots)$$

possui infinitos números primos entre seus termos.

Uma vez que o conjunto dos naturais é uma PA infinita cujo primeiro termo (igual a 1) e razão (também 1) são primos entre si, vemos que o teorema de Dirichlet generaliza o teorema usualmente atribuído a Euclides, que garante que há infinitos primos. Ele também garante que há infinitos primos de cada uma das formas $3k + 1$, $3k + 2$, $4k + 1$, $4k + 3$, etc, haja vista que as PAs

$$(1, 4, 7, 11, \ldots), \quad (2, 5, 8, 12, \ldots)$$

$$(1, 5, 9, 13, \ldots), \quad (3, 7, 11, 15, \ldots)$$

enquadram-se em suas hipóteses.

A demonstração do Teorema de Dirichlet é bastante difícil, e foge amplamente ao que podemos fazer aqui. De fato, mesmo o caso em que $a = 1$, isto é, aquele da PA

$$(1, 1 + r, 1 + 2r, \ldots)$$

tem demonstração bem difícil (que pode ser encontrada em [2]).

Talvez o leitor ache surpreendente saber que vale também o resultado a seguir, conhecido como o Teorema de Green-Tao e provado em 2004 pelo matemático inglês Ben Green e pelo matemátic australiano Terence Tao (de fato, esse teorema coroou a brilhante carreira de Terence Tao, que ganhou a Medalha Fields – considerada o Prêmio Nobel de Matemática – em 2006).

Teorema 11. *Dado $n > 2$, existe uma PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tal que todos os seus termos são primos.*

A solução do Exemplo 8 mostra PAs formadas por 3 e 4 primos. Você consegue exibir uma formada por 5 primos?

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas a três sessões de 50min para discutir todo o conteúdo deste material. O professor pode dedicar uma sessão para cada uma das duas primeiras seções, e uma terceira para apresentar o último exemplo da segunda seção, juntamente com os enunciados dos teoremas de Dirichlet e Green-Tao, discutindo casos particulares até certificar-se de que os estudantes compreenderam seus significados.

As referências colecionadas a seguir contém muitos exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relacionados ao conteúdo do presente material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 6: Polinômios*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016.

3. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.