Material Teórico - Módulo Progressões Geométricas

A Soma dos Termos de uma PG Ininita

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 A soma dos termos de uma PG finita

Dando continuidade a nosso estudo de progressões geométricas, concentraremos nossos esforços aqui em obter uma fórmula que nos permita calcular a soma dos termos de uma *PG infinita*, desde que tal soma faça sentido.

Vimos nas aulas anteriores que a soma dos termos de uma PG finita $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, com razão $q \neq 1$, é dada pela fórmula

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \qquad (1)$$

A fim de ilustrar a extrapolação de (1) a certas PGs infinitas, apliquemos a fórmula acima ao caso da progressão

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right).$$

Denotando por S_n a soma de seus n primeiros termos, segue daquela fórmula que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Agora, examinemos os valores de $\frac{1}{2^n}$ e S_n, para n respectivamente igual a 2, 3, 4, ..., 8. Os valores correspondentes (obtidos com o auxílio de uma calculadora) estão colecionados na tabela abaixo:

n	$1/2^n$	S_n
2	$0,25$	$0,75$
3	$0,125$	$0,875$
4	$0,0625$	$0,9375$
5	$0,03125$	$0,96875$
6	$0,015625$	$0,984375$
7	$0,0078125$	$0,9921875$
8	$0,00390625$	$0,99609375$

Da tabela acima, vemos que quanto maior o valor de n menor é o valor de $\frac{1}{2^n}$. Além disso, à medida que n aumenta, aparentemente os valores de $\frac{1}{2^n}$ se aproximam cada vez mais de 0, de sorte que os valores de S_n se aproximam cada vez mais de 1.

Esse é realmente o caso. De fato, se quisermos que

$$0 < 1 - S_n < \frac{1}{100.000},$$

por exemplo, basta observarmos que, como como $2^4 > 10$, temos

$$2^{20} = \left(2^4\right)^5 > 10^5 = 100.000;$$

assim,

$$\begin{aligned} n \geq 20 &\Longrightarrow 2^n \geq 2^{20} > 100.000 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100.000}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$n \geq 20 \Longrightarrow 0 < 1 - S_n < \frac{1}{100.000},$$

de sorte que a diferença entre S_n e 1 só aparece na sexta casa decimal.

Graças à discussão acima, *definimos* o valor da soma infinita

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

como sendo igual a 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1. \qquad (2)$$

Um outro modo, desta vez *geometricamente intuitivo*, de ver que a soma S dada acima vale 1 é o seguinte: suponha que um quadrado de lado 1cm é dividido em dois retângulos de lados $\frac{1}{2}$cm e 1cm cada, e que descartamos um desses retângulos, cuja área vale $\frac{1}{2}$cm^2.

Em seguida, o outro retângulo é dividido em dois quadrados de lado $\frac{1}{2}$cm, e também descartamos um desses quadrados, cuja área vale $\frac{1}{4}$cm^2.

A essa altura, a soma das áreas das figuras descartadas é $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (veja a figura 1).

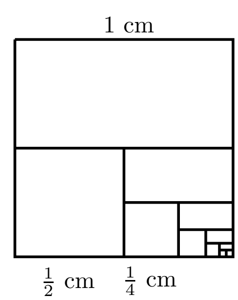

Figura 1: interpretando geometricamente a soma S.

Repetindo esse procedimento n vezes, obtemos que a soma das áreas das figuras descartadas é dada por

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Intuitivamente, percebemos que a área da figura que sobra depois de efetuarmos n descartes fique cada vez mais próxima de zero, ou seja, que a soma das áreas das figuras que foram descartadas fique cada vez mais próxima da área do quadrado, que vale 1cm^2. Isso sugere a validade da igualdade

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Generalizamos a discussão acima com a proposição a seguir, cuja demonstração pode ser omitida numa primeira leitura. A fórmula (3) a seguir é conhecida como a **soma dos termos de uma PG infinita**.

Proposição 1. *Se* $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ *é uma PG de razão* $|q| < 1$*, então vale:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q}. \tag{3}$$

Antes de provarmos a proposição acima, observamos que o sentido da igualdade (3) deve ser entendido da mesma forma que (2), isto é, pondo

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

temos de mostrar que a diferença entre S_n e $\frac{a_1}{1-q}$ se aproxima cada vez mais de 0, à medida que n aumenta.

Para conseguirmos mostrar isso, faremos essencialmente o mesmo que fizemos na discussão que levou a (2); a diferença é que será mais difícil estimar o tamanho de $|q|^n$ do que foi estimar o tamanho de 2^n.

Prova. Se $q = 0$, não precisamos fazer nada. Suponha, portanto, que $0 < |q| < 1$. Segue de (1) que

$$\begin{aligned}\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| &= \left|a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\right| \\ &= \left|\frac{a_1 q^n}{1-q}\right| = \left|\frac{a_1}{1-q}\right| \cdot |q|^n.\end{aligned} \tag{4}$$

Agora, observe que $0 < |q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1$, de forma que podemos escrever

$$\frac{1}{|q|} = 1 + a,$$

para algum $a > 0$. Então, para $n > 1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|q|^n} &= (1+a)^n = \underbrace{(1+a)\dots(1+a)}_{n \text{ vezes}} \\ &= 1 + na + (\text{soma de parcelas positivas}) \\ &> na,\end{aligned}$$

o que é o mesmo que $|q|^n < \dfrac{1}{na}$.

De volta a (4), vemos que

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| = \left|\frac{a_1}{1-q}\right| \cdot |q|^n < \left|\frac{a_1}{1-q}\right| \cdot \frac{1}{na}.$$

Agora, a constante $\left|\dfrac{a_1}{1-q}\right| \cdot \dfrac{1}{a}$ é menor do que alguma potência de 10, digamos 10^k, para alguma constante k; isso nos dá

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| < 10^k \cdot \frac{1}{n}.$$

Então, se quisermos que a diferença entre os valores de S_n e $\dfrac{a_1}{1-q}$ só apareça a partir da $m-$ésima casa decimal, basta pedirmos que

$$10^k \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{10^m},$$

isto é, que $n > 10^{m+k}$.

Em resumo, o argumento acima mostra que, sendo $\left|\dfrac{a_1}{1-q}\right| \cdot \dfrac{1}{a} < 10^k$, então, dado $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\left|S_n - \frac{a_1}{1-q}\right| < 10^k \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{10^m}$$

para todo $n > 10^{m+k}$.

Logo, podemos tornar as somas S_n tão próximas quanto queiramos de $\dfrac{a_1}{1-q}$, bastando, para tanto, tomar n suficientemente grande. Mas, como vimos imediatamente antes da demonstração, esse é precisamente o sentido da igualdade (3). □

Observação 2. *Quando a razão q de uma PG infinita satisfaz $|q| \geq 1$ e seu primeiro termo a_1 é não nulo,* **não é possível** *dar um sentido à soma infinita*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Ademais, se $a_1 > 0$ e $q > 1$, então as somas finitas $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ficam tão grandes quanto queiramos, bastando tomar n suficientemente grande.

No restante deste material, discutimos algumas aplicações da Proposição 1.

Exemplo 3. *Calcule a soma dos termos da PG*

$$\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots\right).$$

Solução. Temos $a_1 = 2$ e $q = \frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$. Portanto, utilizando (3), obtemos:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$$

□

Exemplo 4. *Calcule, se estiver definida, a soma dos termos da PG infinita cujo primeiro e segundo termos são, nessa ordem,* $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$ *e* $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5}$.

Solução. Temos $a_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$ e

$$\begin{aligned} q &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5} \div \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+5} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\cancel{\sqrt{5}}} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, a soma S da PG infinita em questão tem sentido e, invocando uma vez mais a fórmula da Proposição 1, obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}}{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{\sqrt{5}^2}{\sqrt{5}^2 - 1^2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Calcule a soma dos termos da PG infinita*

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{20}, \ldots\right).$$

Solução. Neste caso, temos $a_1 = \dfrac{2}{5}$ e

$$q = -\frac{1}{5} \div \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Observe que $|q| < 1$, o que permite que utilizemos novamente a Proposição 1:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \cdots &= \frac{\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6. *Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma PG infinta tal que $a_1 = 2$. Se a soma dos termos da PG é igual a $\frac{11}{2}$, encontre o valor de sua razão q.*

Solução. Chamando de S a soma dos termos da PG, segue de (3) que

$$\frac{11}{2} = S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-q}.$$

Daí, obtemos

$$11 - 11q = 4 \Longrightarrow 11q = 7 \Longrightarrow q = \frac{7}{11}.$$

□

Para o próximo exemplo, observe que um decimal infinito

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \qquad (5)$$

(isto é, tal que o algarismo a_n é não nulo para infinitos valores de n) é uma abreviação para a *soma infinita*

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots. \qquad (6)$$

Em Matemática, somas infinitas da forma acima são denominadas **séries**, mas seu estudo está bem além do propósito destas notas. Se, contudo, o decimal (5) for uma dízima periódica, então (6) se reduz à soma dos termos de uma PG infinita, com razão de módulo menor que 1. Nosso último exemplo esclarece esse ponto.

Exemplo 7. *Quais as frações geratrizes das dízimas periódicas $0,777\ldots$ e $0,4323232\ldots$?*

Solução. Para a primeira dízima, observe que

$$\begin{aligned} 0,777\ldots &= 0,7 + 0,07 + 0,007 + \ldots \\ &= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1.000} + \cdots, \end{aligned}$$

ou seja, a dízima $0,777\ldots$ é a soma dos termos da PG infinita que tem $a_1 = \frac{7}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$. Portanto,

$$0,777\ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{9}.$$

A segunda dízima pode ser tratada de modo inteiramente análogo:

$$\begin{aligned} 0,4323232\ldots &= 0,4 + 0,032 + 0,00032 + \ldots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{32}{1.000} + \frac{32}{100.000} + \cdots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{\frac{32}{1.000}}{1-\frac{1}{100}} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{32}{1.000} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{32}{990} = \frac{428}{990} \\ &= \frac{214}{495}. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir o conteúdo deste material. Explique cuidadosamente aos alunos que, quando a razão q de uma PG tem módulo menor do que 1, então as potências q^n se aproximam de 0, pois esse fato é crucial para o entendimento da fórmula dada na Proposição 1. Entretanto, numa primeira apresentação, melhor do que tentar fazer os alunos compreenderem a demonstração apresentada para este resultado, é adaptar o argumento apresentado para a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ para calcular as somas das PGs infinitas

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots\right) \text{ e } \left(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots\right).$$

A análise desses três casos deve bastar para convencer os alunos de que (3) é válida em geral.

As referências [3] e [4] contém muitos exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, relacionados ao conteúdo do presente material. O capítulo 1 de [2] traz uma discussão heurística da relação entre o decimal infinito (5) e a soma infinita (6); tal discussão é colocada em bases sólidas no capítulo 3 de [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

3. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.

4. E. Lima, P. Carvalho, E. Wagner, A. Morgado, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*, 5ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2004.