Material Teórico - Módulo Sistemas de Equações do 1º Grau

Sistemas de Equações do 1º Grau

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

Um **sistema linear de equações do 1º grau** (ou simplesmente um **sistema linear**) com duas equações e duas incógnitas é um conjunto formado por duas equações lineares (ou de 1º grau), em que cada uma dessas equações possui duas incógnitas. Portanto, qualquer sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas incógnitas deve ter a seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f. \end{array}\right. \tag{1}$$

Uma **solução** de (1) é um par ordenado (x_0, y_0) de números reais, tais que as igualdades

$$ax_0 + by_0 = e \ \text{ e } \ cx_0 + dy_0 = f$$

são verdadeiras.

Observação 1. *Pode-se mostrar que, se $ad - bc \neq 0$, então o sistema* (1) *possui uma única solução, e, se $ad - bc = 0$, então o sistema* (1) *ou não possui solução alguma ou possui infinitas soluções.*

Também pode ser mostrado que cada uma das equações que compõem o sistema (1) *é representada por uma reta no plano cartesiano. Em relação a tal* **intepretação geométrica**, *o sistema possui uma única solução se, e só se, essas retas são* **concorrentes**; *isso significa que as retas se intersectam em um único ponto, cujas coordenadas são precisamente a solução do sistema. Por outro lado, no caso em que o sistema não tem soluções, as retas que representam as equações do sistema são* **paralelas**, *isto é, não têm pontos em comum. Por fim, se o sistema possuir infinitas soluções, então as retas que representam cada uma das equações são* **coincidentes**, *isto é, idênticas.*

Vários problemas aritméticos elementares podem ser solucionados utilizando-se sistemas lineares. A título de ilustação, vejamos um exemplo.

Exemplo 2. *Em um sítio há somente dois tipos de animais: porcos e perus, totalizando 26 cabeças e 72 patas. Qual a quantidade de animais de cada tipo?*

Se denotamos o número de perus por x e o número de porcos por y, as condições sobre os números de cabeças e de patas dos animais nos dão:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 26 \\ 2x & + & 4y & = & 72 \end{array}\right. , \tag{2}$$

pois são 26 animais no total (o que acarreta $x + y = 26$), e duas patas para cada peru e quatro patas para cada porco (implicando $2x + 4y = 72$).

Nas próximas duas seções, estudaremos técnicas para resolver esse e diversos outros sistemas.

A teoria de sistemas lineares de equações estende-se naturalmente a sistemas com números finitos quaisquer de equações e incógnitas. Mais precisamente, um **sistema de equações do 1º grau** (ou **sistema linear**) com m equações e n incógnitas tem a seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Uma **solução** do sistema linear acima é uma sequência de n números reais $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ que, uma vez substituídos por x_1, x_2, $\dots$, x_n, transformam todas as equações do sistema em igualdades verdadeiras.

Através do estudo da teoria de matrizes e determinantes é possível determinar se um sistema linear possui alguma solução e se tal solução é única ou se são infinitas soluções (tal teoria também permite mostrar que a possibilidade de o número de soluções ser número finito e maior que 1 nunca ocorre).

Ao leitor interessado em obter mais informações sobre esses conceitos, sugerimos a referência [2], apresentada no fim destas notas. Observamos, ainda, que a referência [1] trata diretamente os casos mais simples de sistemas de duas equações a duas incógnitas e três equações a três incógnitas.

Neste material, será dada ênfase aos sistemas com duas equações e duas incógnitas, embora sejam apresentados alguns exemplos com números maiores de equações e incógnitas.

2 O método da adição

O **método da adição** para a resolução de sistemas lineares consiste em *adicionar membro a membro* as equações do sistema, previamente multiplicadas por constantes reais adequadas, com o objetivo de diminuir a quantidade de incónitas. Mostremos como ele funciona examinando alguns exemplos:

Exemplo 3. *A soma das idades dos irmãos Joaquim e José é 73 anos. Sabendo que Joaquim é 9 anos mais velho que José, calcule as idades dos irmãos.*

Solução. Se denotarmos por x a idade de Joaquim e por y a idade de José, as condições dadas no problema sobre as idades dos dois nos permitem escrever o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 73 \\ x & - & y & = & 9. \end{array}\right.$$

Somando as equações membro a membro, obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & \cancel{y} & = & 73 \\ x & - & \cancel{y} & = & 9 \\ \hline 2x & & & = & 82, \end{array}\right.$$

de onde concluímos que

$$x = \frac{82}{2} = 41.$$

Assim, Joaquim, que é o irmão mais velho, tem 41 anos. Portanto, João, o irmão 9 anos mais jovem, tem $41-9=32$ anos. $\square$

Exemplo 4. *Encontre, se houver, a(s) solução(ões) do sistema linear*

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases}$$

Solução. Somando membro a membro as equações, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & \cancel{5y} & = & 11 \\ 2x & - & \cancel{5y} & = & -4 \\ \hline 5x & & & = & 7, \end{array}\right.$$

ou seja,

$$x = \frac{7}{5}.$$

Agora, substituindo o valor de x na primeira equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{7}{5} + 5y = 11 &\Longrightarrow 5y = 11 - \frac{21}{5} \\ &\Longrightarrow 5y = \frac{34}{5} \\ &\Longrightarrow y = \frac{34}{25}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 5. *Se dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos* 64 Kg*, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos* 41 Kg*, qual é o peso conjunto de um tijolo e um saco de areia?*

Solução. Mais uma vez, denotemos por x o peso de um tijolo e por y o peso de um saco de areia (em quilogramas).

Como dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos 64 Kg, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos 41 Kg, obtemos o sistema linear de equações

$$\begin{cases} 2x + 3y = 64 \\ x + 2y = 41. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -1 e adicionando-a membro a membro à primeira, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 64 \\ -x & - & 2y & = & -41 \\ \hline x & + & y & = & 23, \end{array}\right.$$

o que nos permite concluir, sem a necessidade de encontrar os valores de x e y, que o peso conjunto de um tijolo e um saco de areia é 23 Kg. $\square$

Exemplo 6. *Resolva o sistema linear*[1]

$$\left\{\begin{array}{rcccccccc} (i) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ (ii) & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ (iii) & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 6 \\ (iv) & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 6 \\ (v) & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 6 \\ (vi) & x_6 & + & x_7 & + & x_8 & = & 6 \\ (vii) & x_7 & + & x_8 & + & x_9 & = & 6 \\ (viii) & x_8 & + & x_9 & + & x_{10} & = & 6 \\ (ix) & x_9 & + & x_{10} & + & x_1 & = & 6 \\ (x) & x_{10} & + & x_1 & + & x_2 & = & 6. \end{array}\right.$$

Solução. Multiplicando (ii) por -1 e adicionando o resultado a (i), obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \cancel{x_2} & + & \cancel{x_3} & = & 6 \\ -\cancel{x_2} & - & \cancel{x_3} & - & x_4 & = & -6 \\ \hline x_1 & - & x_4 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

e concluímos que $x_1 = x_4$. Fazendo o mesmo com as equações (ii) e (iii), obtemos $x_2 = x_5$. Empregando o mesmo raciocínio aos demais pares de equações consecutivas, obtemos $x_3 = x_6$, $x_4 = x_7$, $x_5 = x_8$, $x_6 = x_9$, $x_7 = x_{10}$, $x_8 = x_1$ e $x_9 = x_2$. Assim,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_9 = x_{10}.$$

Substituindo $x_1 = x_2 = x_3$ na equação (i), obtemos

$$3x_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

de maneira que $x_1 = 2$. Portanto, $x_1 = x_2 = \ldots = x_9 = x_{10} = 2$. $\square$

Exemplo 7. *Resolva o sistema linear*

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 32 \\ x + 2y + z + w = 64 \\ x + y + 2z + w = 128 \\ x + y + z + 2w = 256. \end{cases}$$

Solução. Somando membro a membro as quatro equações do sistema, obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & w & = & 32 \\ x & + & 2y & + & z & + & w & = & 64 \\ x & + & y & + & 2z & + & w & = & 128 \\ x & + & y & + & z & + & 2w & = & 256 \\ \hline 5x & + & 5y & + & 5z & + & 5w & = & 480 \end{array}\right. .$$

Daí, concluímos que

$$x + y + x + w = \frac{480}{5} = 96.$$

Agora, se multiplicarmos a última equação acima por -1 e adicionarmos o resultado sucessivamente a cada uma

[1] Observe que numeramos as equações somente para que seja mais cômodo nos referirmos a elas ao longo da solução.

das equações do sistema original, obteremos os valores de x, y, z e w. Vejamos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & w & = & 32 \\ -x & - & y & - & z & - & w & = & -96 \\ \hline x & & & & & & & = & -64, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & w & = & 64 \\ -x & - & y & - & z & - & w & = & -96 \\ \hline & & y & & & & & = & -32, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & w & = & 128 \\ -x & - & y & - & z & - & w & = & -96 \\ \hline & & & & z & & & = & 32 \end{array}\right.$$

e

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & w & = & 256 \\ -x & - & y & - & z & - & w & = & -96 \\ \hline & & & & & & w & = & 160. \end{array}\right.$$

□

Exemplo 8. *Resolva o sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_3 & = & 2004 \\ x_2 & + & x_3 & = & 2007 \\ x_3 & + & x_4 & = & 2016 \\ x_3 & + & x_5 & = & 2021 \\ x_4 & + & x_5 & = & 2023. \end{array}\right.$$

Solução. Primeiramente, reescrevemos o sistema enumerando as suas equações:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcr} (i) & x_1 & + & x_3 & = & 2004 \\ (ii) & x_2 & + & x_3 & = & 2007 \\ (iii) & x_3 & + & x_4 & = & 2016 \\ (iv) & x_3 & + & x_5 & = & 2021 \\ (v) & x_4 & + & x_5 & = & 2023. \end{array}\right.$$

Agora, multiplicamos a equação (v) por -1 e adicionamos o resultado à equação (iv), obtendo:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcr} & x_3 & + & \cancel{x_5} & = & 2021 \\ & -x_4 & - & \cancel{x_5} & = & -2023 \\ \hline (VI) & x_3 & - & x_4 & = & -2. \end{array}\right.$$

Então, adicionando as equações (iii) e (vi) , obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_3 & + & \cancel{x_4} & = & 2016 \\ x_3 & - & \cancel{x_4} & = & -2 \\ \hline 2x_3 & & & = & 2014 \end{array}\right. ,$$

e segue que

$$x_3 = \frac{2014}{2} = 1007.$$

Por fim, substituindo o valor encontrado para x_3 sucessivamente em (i), (ii), (iii) e (iv) obtemos, respectivamente,

$$x_1 = 2004 - x_3 = 2004 - 1007 = 997,$$

$$x_2 = 2007 - x_3 = 2007 - 1007 = 1000,$$

$$x_4 = 2016 - x_3 = 2016 - 1007 = 1009$$

e

$$x_5 = 2023 - x_4 = 2023 - 1009 = 1014.$$

□

3 O método da substituição

O **método da substituição** consiste em isolar o valor de uma das incógnitas em uma das equações e substituir esta incógnita nas outras equações, de modo que a quantidade de incógnitas e de equações diminua. Em particular, quando o sistema possui duas incógnitas, apenas uma substituição é suficiente para resolvê-lo. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 9. *Quando* 31 *mulheres se retiraram ao mesmo tempo de uma festa, a razão entre os números de homens e mulheres ficou igual a* $\frac{2}{1}$*, nessa ordem. Um pouco depois, foi a vez de sair um grupo de* 55 *homens, alterando a razão entre homens e mulheres para* $\frac{1}{3}$*, também nessa ordem. Qual o número de pessoas presentes antes do primeiro grupo de mulheres se retirar?*

Solução. Denotando por m a quantidade de mulheres e por h a quantidade de homens antes da saída do primeiro grupo, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{h}{m-31} = \frac{2}{1} \\ \frac{h-55}{m-31} = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Agora, observe que

$$\frac{h}{m-31} = \frac{2}{1} \Longleftrightarrow h = 2(m-31) = 2m - 62$$

e

$$\begin{aligned} \frac{h-55}{m-31} = \frac{1}{3} &\Longleftrightarrow 3(h-55) = m - 31 \\ &\Longleftrightarrow 3h - 165 = m - 31 \\ &\Longleftrightarrow 3h - 134 = m. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema original é equivalente as sistema

$$\left\{\begin{array}{l} h = 2m - 62 \\ 3h - 134 = m. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Substituindo $h = 2m - 62$ na segunda equação de (3), obtemos

$$\begin{aligned} 3h - 134 = m &\Longleftrightarrow 3(2m-62) - 134 = m \\ &\Longleftrightarrow 6m - 320 = m \\ &\Longleftrightarrow 5m = 320 \\ &\Longleftrightarrow m = 64. \end{aligned}$$

De posse do valor de m, podemos calcular

$$h = 2m - 62 \Longleftrightarrow h = 2 \cdot 64 - 62 = 66.$$

Portanto, concluímos que o número inicial de homens era 66 e o número inicial de mulheres era 64, de forma que havia $66 + 64 = 130$ pessoas no início da festa. □

Exemplo 10. *Uma balança de dois pratos encontra-se equilibrada. Em um de seus pratos estão dois copos cheios de farinha e no outro três copos com farinha até a metade. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400g de farinha. Qual é o peso de um copo vazio?*

Solução. Sejam x o peso da quantidade de farinha utilizada para encher um copo e y o peso de cada copo. Como a balança tem dois copos cheios de farinha em um dos lados e três copos pela metade do outro, totalizando 1400g, temos:

$$2x + 3 \cdot \frac{x}{2} = 1400.$$

Por outro lado, como a balança está equilibrada, o peso de dois copos cheios de farinha é igual ao peso de três copos com farinha até a metade, ou seja,

$$2x + 2y = 3 \cdot \frac{x}{2} + 3y.$$

Temos, então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3 \cdot \frac{x}{2} = 1400 \\ 2x + 2y = 3 \cdot \frac{x}{2} + 3y. \end{cases}$$

A primeira equação pode ser resolvida imediatamente, uma vez que contém apenas a variável x:

$$2x + 3 \cdot \frac{x}{2} = 1400 \Longleftrightarrow \frac{7x}{2} = 1400 \Longleftrightarrow x = 400.$$

Por outro lado, a segunda equação fornece

$$\begin{aligned} 2x + 2y = 3 \cdot \frac{x}{2} + 3y &\Longleftrightarrow 2x - \frac{3x}{2} = 3y - 2y \\ &\Longleftrightarrow \frac{x}{2} = y. \end{aligned}$$

Ficamos, pois, com o sistema linear

$$\begin{cases} x = 400 \\ \frac{x}{2} = y. \end{cases}$$

e segue, imediatamente, que

$$y = \frac{400}{2} = 200,$$

ou seja, o peso de um copo vazio é 200g. □

Exemplo 11. *Um estacionamento cobra R\$ 3,00 por moto e R\$ 5,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R\$ 382,00 para um total de 100 veículos. Quantas motos e carros utilizaram o estacionamento nesse dia?*

Solução. Denotando por x a quantidade de motos e por y a quantidade de carros que fizeram uso do estacionamento durante esse dia, as condições dadas no enunciado do problema nos garantem que

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 3x + 5y = 382. \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda, obtemos

$$\begin{aligned} 3x + 5(100 - x) = 382 &\Longleftrightarrow 3x + 500 - 5x = 382 \\ &\Longleftrightarrow 2x = 118 \\ &\Longleftrightarrow x = 59. \end{aligned}$$

Portanto, $y = 100 - 59 = 41$, de sorte que 59 motos e 41 carros utilizaram o estacionamento naquele dia. □

Os dois últimos exemplos que apresentamos ilustram o fato de que alguns sistemas de equações aparentemente mais complicados podem ser facilmente reduzidos a sistemas lineares por meio de *substituições de variáveis* convenientes.

Exemplo 12. *Calcule números reais positivos x e y tais que:*

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ 3x^2 - 7y^2 = 35 \end{cases}.$$

Solução. Fazendo $x^2 = a$ e $y^2 = b$, o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} (i) \quad a - 2b = 17 \\ (ii) \quad 3a - 7b = 35 \end{cases},$$

que é um sistema linear.

Para resolvê-lo, isolamos o valor de a no primeiro membro de (i), obtendo $a = 2b + 17$; em seguida, substituímos tal valor na equação (ii), obtendo

$$\begin{aligned} 3a - 7b = 35 &\Longleftrightarrow 3(2b + 17) - 7b = 35 \\ &\Longleftrightarrow 6b + 51 - 7b = 35 \\ &\Longleftrightarrow b = 16. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$a = 2b + 17 = 2 \cdot 16 + 17 = 49.$$

Agora, como x e y são positivos, temos

$$x^2 = a = 49 \Longleftrightarrow x = 7$$

e

$$y^2 = b = 16 \Longleftrightarrow y = 4.$$

□

Exemplo 13. *Encontre todos os números reais não nulos x e y para os quais*

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 0. \end{cases}$$

Solução. Fazendo $\frac{1}{x} = a$ e $\frac{1}{y} = b$, podemos reescrever o sistema como

$$\begin{cases} a + 2b = \frac{5}{12} \\ 3a - 4b = 0. \end{cases}$$

Substituindo $a = \frac{5}{12} - 2b$ na segunda equação, vem que

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{5}{12} - 2b\right) - 4b = 0 &\iff \frac{15}{12} - 6b - 4b = 0 \\ &\iff 10b = \frac{5}{4} \\ &\iff b = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$a = \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Portanto, $x = \frac{1}{a} = 6$ e $y = \frac{1}{b} = 8$. $\square$

Dicas para o Professor

Três sessões de 50min são suficientes para apresentar todo o conteúdo deste material. Recomendamos que seja dispensado um tempo maior aos problemas que envolvem sistemas com mais de duas incógnitas, pois estes requerem um pouco mais de esforço para que sejam entendidos. Para sistemas que modelam problemas aritméticos, é de fundamental importância que os alunos entendam como montar as equações do sistema a partir dos dados do problema foi proposto. Sendo assim, também recomendamos que, para tais tipos de problema, o tempo gasto seja maior e a atenção seja redobrada, uma vez que cometer algum erro na execução dessa etapa da solução é algo muito comum.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi e S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.