Questão 1. Encontre todos os pares (x, y) de números naturais tais que $x^2 - y^2 = 303$.
(*Dica*: use que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ e fatore 303 em números primos).

Tem-se $x^2 - y^2 = 303$ se, e somente se, $(x - y)(x + y) = 303$. A fatoração em números primos de 303 é $303 = 3 \times 101$. Assim, a equação original é equivalente a $(x - y)(x + y) = 3 \times 101$. Considerando que $x - y < x + y$ Segue, da unicidade da fatoração em primos que $x - y = 1$ e $x + y = 303$ ou $x - y = 3$ e $x + y = 101$. De $x - y = 1$ e $x + y = 303$, segue que $x = 152$ e $y = 151$. De $x - y = 3$ e $x + y = 101$, segue que $x = 52$ e $y = 49$. Assim, as soluções são $(x, y) = (152, 151)$ e $(x, y) = (52, 49)$.

Questão 2 (Questão 3 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2015 – Modificado). Os números inteiros positivos foram escritos em sequência, como indicado a seguir:

$$\begin{array}{c} 1\ 2 \\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15 \\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25\ 26 \end{array}$$

Observe que na primeira linha foram escritos os números 1 e 2 e que nas seguintes linhas há 3 números a mais do que na linha anterior. Em qual linha foi escrito o número 2018?

Seja a_n a quantidade de números na linha n. A sequência a_n forma uma progressão aritmética de primeiro elemento $a_1 = 2$ e razão $d = 3$. Logo, na linha n há $a_n = 2 + 3 \cdot (n - 1) = 3n - 1$ números. O último número da linha n é igual à soma dos n primeiros termos da progressão aritmética: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2+3n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$.

Observe que se $2018 \leq \frac{3n^2}{2} \leq \frac{n(3n+1)}{2}$ então de $2018 \leq \frac{3n^2}{2}$, obtemos $\sqrt{\frac{2}{3} \times 2018} \approx 36{,}6 \leq n$. Verificamos que $S_{36} = \frac{36 \times (3 \times 36 + 1)}{2} = 1962$ e $S_{37} = \frac{37 \times (3 \times 37 + 1)}{2} = 2072$, logo o número 2018 foi escrito na linha 37.