Material Teórico - Módulo Porcentagem - Parte 1

Porcentagem

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Porcentagem

Suponha que, durante os anos de 2015 e 2016, as produções (em unidades de veículos) de duas fábricas de automóveis foram dadas de acordo com a tabela abaixo:

Fábrica	2015	2016
A	2000	2200
B	3000	3210

Observe que a quantidade de veículos produzidos pela fábrica A em 2016 teve um aumento de 200 unidades em relação a 2015, enquanto que a fábrica B teve um aumento de 210 unidades no mesmo período. É claro que, em números absolutos, o crescimento da fábrica B foi maior do que o da fábrica A. Entretanto, se consideramos a razão entre o aumento da produção em 2016 e o número de veículos produzidos em 2015, teremos:

Fábrica	Razão
A	$\frac{200}{2000}$
B	$\frac{210}{3000}$

Note ainda que

$$\frac{200}{2000} = \frac{10}{100} \text{ e } \frac{210}{3000} = \frac{7}{100}.$$

As frações $\frac{10}{100}$ e $\frac{7}{100}$, que têm denominador igual a 100, são chamadas **frações centesimais**, e representam, em cada caso, o crescimento **percentual** ou **porcentual** das produções de veículos nas fábricas A e B, respectivamente. Alternativamente, podemos dizer que tais frações representam, em cada caso, a **porcentagem** ou **porcentagem** do crescimento das produções nas fábricas. Desse modo, podemos dizer que, em termos percentuais, o crescimento da produção na fábrica A foi de 10% (lê-se *dez por cento*), e na fábrica B foi de 7% (lê-se *sete por cento*). Esses números fracionários nos permitem afirmar que, *percentualmente*, a produção de veículos cresceu mais na fábrica A do que na fábrica B.

Uma outra forma de representar um percentual é através de um número decimal. No exemplo acima, temos

$$10\% = \frac{10}{100} = 0,10 = 0,1$$

e

$$7\% = \frac{7}{100} = 0,07.$$

Exemplo 1. *Calcule:*

(a) 12% *de* 200.

(b) 35% *de* 540.

(c) 18% *de* 750.

(d) 45, 5% *de* 5000.

Solução.

(a) 12% de $200 = \frac{12}{100} \cdot 200 = 12 \cdot 2 = 24$.

(b) 35% de $540 = \frac{35}{100} \cdot 540 = \frac{35 \cdot 54}{10} = \frac{1890}{10} = 189$.

(c) 18% de $750 = \frac{18}{100} \cdot 750 = \frac{18 \cdot 75}{10} = \frac{1350}{10} = 135$.

(d) $45,5\%$ de $5000 = \frac{45,5}{100} \cdot 5000 = 45,5 \cdot 50 = 2275$.

□

Exemplo 2. *O salário dos profesores das escolas públicas de Ensino Médio de um certo estado era de* R\$ 2600, 00 *no ano de* 2014 *e teve uma aumento percentual de* 6% *em janeiro de 2015. Calcule o valor do salário dos profesores após o aumento.*

Solução. Inicialmente, devemos calcular o aumento, que foi de 6% sobre o valor do salário de 2014, ou seja, 6% e 2600. Então, o valor do aumento foi de

$$\frac{6}{100} \cdot 2600 = 6 \cdot 26 = 156$$

reais. Portanto, o salário após o aumento passou a ser

$$\text{R\$}\,2600,00 + \text{R\$}\,156,00 = \text{R\$}\,2756,00.$$

□

Exemplo 3. *Um reservatório com capacidade para* $17000\,l$ *de água estava completamente cheio. Devido a um vazamento, ele perdeu* 15% *do volume inicial, até que o problema do vazamento foi resolvido. Calcule o volume de água que restou no reservatório após a perda com o vazamento.*

Solução. Primeiramente, calculamos o volume de água perdido com o vazamento, que correspondeu a 15% do total de $17000\,l$, ou seja, a

$$\frac{15}{100} \cdot 17000 = 15 \cdot 170 = 2550$$

litros. Desse modo, o volume restante após a perda com o vazamento passou a ser de

$$17000\,l - 2550\,l = 14450\,l.$$

□

Exemplo 4. *As lojas "Preço Justo"e "Compra Certa"vendem uma mesma bicicleta, da marca "Pedalar", por* R\$ 1250, 00*. Durante um fim de semana, a bicicleta estava em oferta em ambas as lojas. Na loja "Preço Justo", a bicicleta estava sendo vendida por* R\$ 1100, 00*, enquanto a loja "Compra Certa"estava concedendo um desconto de* 11% *em todos os seus produtos. Em qual das lojas o desconto ofertado foi maior?*

Solução. A loja "Preço Justo" estava concedendo um desconto de R$ 1250,00 − R$ 1100,00 = R$ 150,00. Por outro lado, a "Compra Certa" estava oferecendo um desconto de 11% sobre o valor de R$ 1250,00, ou seja,

$$\frac{11}{100} \cdot 1250 = 11 \cdot 12,50 = 137,50.$$

Portanto, o maior desconto foi o oferecido pela loja "Preço Justo". □

Exemplo 5. *Em certo país, o valor do Imposto de Renda mensal pago pelos trabalhadores formais obedece às seguintes regras:*

(i) Quem recebe salário de até $\$\,1500,00$ *é isento.*

(ii) A fatia do salário entre $\$\,1500,00$ *e* $\$\,3500,00$ *é tributada em* 15%.

(iii) A fatia do salário que excede $\$\,3500,00$ *é tributada em* 25%. *Calcule o valor de Imposto de Renda de uma pessoa que recebe:*

(a) $\$\,1200,00$.

(b) $\$\,2900,00$.

(c) $\$\,5688,00$.

Solução.

(a) O trabalhador que recebe $\$\,1200,00$ é obviamente isento de Imposto de Renda.

(b) Se uma pessoa recebe $\$\,2900,00$, a fatia que vai até $\$\,1500,00$ é isenta de imposto. Logo, essa pessoa deve pagar imposto de 15% sobre a diferença $\$\,2900,00 - \$\,1500,00 = \$\,1400,00$, ou seja,

$$\frac{15}{100} \cdot 1400 = 15 \cdot 14 = 210.$$

Portanto, o imposto pago neste caso é de $\$210,00$.

(c) Se o salário do trabalhador é $\$\,5688,00$, ele deve pagar 15% sobre a fatia acima de $\$\,1500,00$ e abaixo de $\$\,3500,00$, mais 25% sobre a fatia acima de $\$\,3500,00$ e abaixo de $\$\,5688,00$. Calculando esses valores, obtemos, respectivamente

$$\frac{15}{100} \cdot 2000 = 15 \cdot 20 = 300$$

e

$$\frac{25}{100} \cdot 2188 = \frac{25 \cdot 2188}{100} = \frac{54700}{100} = 547.$$

Portanto, o valor de Imposto de Renda pago mensalmente por esse trabalhador é de $\$\,300,00 + \$\,547,00 = \$\,847,00$.

□

Exemplo 6. *Todo mês, Fernando reserva* 30% *da sua mesada para o lanche na escola. Do restante, ele gasta* 60% *com a compra de gibis e ainda lhe restam* 84 *reais. Qual o valor da mesada do Fernando?*

Solução. Como não sabemos o valor da mesada do Fernando, chamaremos esse valor de x. Pelo que foi dito no enunciado problema, Fernando reserva 30% de x para as suas despesas com o lanche na escola. Portanto, ele fica com 70% de x para gastar com as demais despesas. Desse valor de 70% de x, ele utiliza 60% para a compra de gibis. Logo, após a compra dos gibis, o percentual da mesada que lhe resta é 40% de 70% de x, o que corresponde a 84 reais. Daí, temos:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot x = 84 \Longrightarrow \frac{28x}{100} = 84$$
$$\Longrightarrow 28x = 8400 \Longrightarrow x = 300.$$

Então, o valor da mesada de Fernando é 300 reais. □

Exemplo 7. *O preço do litro de gasolina em um determinado país era* $\$\,3,00$ *em* 2015. *Em janeiro de* 2016 *esse preço sofreu dois reajustes sucessivos de* 10%. *Qual o preço do litro de gasolina após os aumentos?*

Solução. Observe que, após o primeiro reajuste, que foi de 10%, o preço da gasolina passou a ser

$$3,00 + \frac{10}{100} \cdot 3,00 = 3,00 + 0,30 = 3,30.$$

Para o segundo reajuste, aplicamos o reajuste de 10% em cima de $\$\,3,30$, ou seja:

$$3,30 + \frac{10}{100} \cdot 3,30 = 3,30 + 0,33 = 3,63.$$

Portanto, depois dos dois reajustes, o preço do litro de gasolina saltou para $\$\,3,63$. □

Observação 8. *No exemplo 7, um modo comum (porém incorreto) de pensar, é aplicar um reajuste de* 10%+10% = 20% *sobre o valor de* $\$\,3,00$, *o que acarretaria o preço de* $\$\,3,60$ *para o litro de gasolina após os reajustes:*

$$3,00 + \frac{20}{100} \cdot 3,00 = 3,00 + 0,60 = 3,60.$$

Exemplo 9. *O salário do professor João era de* 2500 *reais, mas, devido à crise econômica, sofreu dois cortes sucessivos de* 10%, *em janeiro e fevereiro de* 2016. *Qual o salário de João após os cortes?*

Solução. Aplicando o primeiro corte de 10%, o salário passou a ser

$$2500 - \frac{10}{100} \cdot 2500 = 2500 - 250 = 2250.$$

Aplicando o segundo corte, obtemos:

$$2250 - \frac{10}{100} \cdot 2250 = 2250 - 225 = 2025.$$

Portanto, após os cortes, o salário do professor João passou a ser de 2025 reais. □

Observação 10. *De modo análogo ao que foi discutido na Observação 8, também no Exemplo 9 é incorreto aplicar de uma vez o corte de* $10\% + 10\% = 20\%$ *sobre o salário inicial do professor João. Realmente, isso daria um salário de*

$$2500 - \frac{20}{100} \cdot 2500 = 2500 - 500 = 2000$$

após os cortes, que é um valor incorreto. Assim:

Resumimos as observações 8 e 10 no quadro abaixo:

A aplicação de porcentagens sucessivas a um certo total inicial **não equivale** à aplicação da soma dessas porcentagens ao total inicial.

Exemplo 11 (OBM - 2004). *Na população de uma espécie rara de* 1000 *aves da floresta amazônica,* 98% *tinham cauda de cor verde. Após uma misteriosa epidemia que só matou parte das aves com cauda verde, essa porcentagem caiu para* 95%. *Quantas aves foram eliminadas com a epidemia?*

Solução. Antes da epidemia, havia

$$\frac{98}{100} \cdot 1000 = 980$$

aves com cauda verde e, portanto, 20 aves que não possuíam a cauda verde. Após a epidemia, que só matou aves da cauda verde, o percentual dessas aves caiu para 95% do total. Daí, as 20 aves que não possuíam a cauda verde passaram a representar 5% do total de aves. Logo, se denotamos por x o total de aves sobreviventes após a epidemia, obtemos:

$$\frac{5}{100} \cdot x = 20 \Longrightarrow \frac{5x}{100} = 20 \Longrightarrow x = 400.$$

Concluímos que morreram $1000 - 400 = 600$ aves durante a epidemia. □

Exemplo 12 (OBM - 2005). *Gabriel resolveu uma prova de Matemática com questões de Álgebra, Geometria e Lógica. Após checar o resultado da prova, Gabriel observou que respondeu corretamente* 50% *das questões de Álgebra,* 70% *das questões de Geometria e* 80% *das questões de Lógica. Gabriel observou, também, que respondeu corretamente* 62% *das questões de Álgebra ou Lógica e* 74% *das questões de Geometria ou Lógica. Qual a porcentagem de questões corretas na prova de Gabriel?*

Solução. Denotemos por A, G e L, respectivamente, a quantidade de questões de Álgebra, Geometria e Lógica da prova, e por a, g e l a quantidade de questões respondidas de modo correto por Gabriel em cada uma dessas três áreas. De acordo com o enunciado no problema, temos:

$$a = \frac{50}{100} \cdot A \Longrightarrow a = 0,5A,$$

$$g = \frac{70}{100} \cdot G \Longrightarrow g = 0,7G$$

e

$$l = \frac{80}{100} \cdot L \Longrightarrow l = 0,8L.$$

Ainda de acordo com o enunciado, temos:

$$a + l = \frac{62}{100} \cdot (A + L) \Longrightarrow a + l = 0,62(A + L)$$

e

$$g + l = \frac{74}{100} \cdot (G + L) \Longrightarrow g + l = 0,74(G + L).$$

Substituindo os valores de a, g e l obtidos nas três primeiras equações, obtemos:

$$\begin{aligned} 0,5A + 0,8L = 0,62(A + L) &\Longrightarrow 0,12A = 0,18L \\ &\Longrightarrow A = \frac{0,18L}{0,12} = \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0,7G + 0,8L = 0,74(G + L) &\Longrightarrow 0,04G = 0,06L \\ &\Longrightarrow G = \frac{0,06L}{0,04} = \frac{3L}{2}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{a+g+l}{A+G+L} &= \frac{0,5A + 0,7G + 0,8L}{A + G + L} \\ &= \frac{0,5 \cdot \frac{3L}{2} + 0,7 \cdot \frac{3L}{2} + 0,8L}{\frac{3L}{2} + \frac{3L}{2} + L} \\ &= \frac{0,75L + 1,05L + 0,8L}{1,5L + 1,5L + L} \\ &= \frac{2,6L}{4L} = 0,65 = \frac{65}{100}. \end{aligned}$$

Como $A+G+L$ é o total de questões na prova e $a+g+l$ é o total de questões respondidas corretamente, concluímos que o percentual de questões respondidas corretamente por Gabriel foi de 65%. □

Exemplo 13 (OBM - 1999). *Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos. Sabe-se que* 90% *são amarelos e* 10% *são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que, no aquário,* 75% *dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?*

(a) 15%

(b) 37%

(c) 50%

(d) 67%

(e) 84%

Solução. Se denotamos por x a quantidade total de peixes no aquário antes das mortes causadas pela doença misteriosa, e por y a quantidade de peixes após as mortes, temos que $0,1x$ eram peixes vermelhos (o que corresponde a 10% de x), e esse mesmo valor corresponde a $0,25y$, pois não morreram peixes vermelhos e ficamos com 25% de peixes vermelhos após a mortandade. Então:

$$0,1x = 0,25y \Longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{0,1}{0,25} = \frac{2}{5}.$$

O percentual de peixes amarelos que sobreviveram é o quociente entre 75% de y e 90% de x, que são as quantidades de peixes amarelos no aquário depois e antes das mortes, respectivamente:

$$\frac{\frac{75y}{100}}{\frac{90x}{100}} = \frac{75}{90} \cdot \frac{y}{x} = \frac{75}{90} \cdot \frac{2}{5} \cong 0,33.$$

Portanto, aproximadamente 33% dos peixes amarelos sobreviveu à doença, donde concluímos que aproximadamente 67% dos peixes desse tipo morreram. □

Exemplo 14 (OBMEP - 2005). *Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser* 26%.

(a) Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?

(b) Quantos homens e quantas mulheres havia na festa depois da chegada dos casais?

Solução.

(a) Denotemos por m o número de mulheres e por h o número de homens antes da chegada dos cinco casais. Como o número de mulheres era quatro vezes o número dos homens, temos $m = 4h$. Deste modo, a porcentagem de homens antes da chegada dos cinco casais era

$$\frac{h}{h+m} = \frac{h}{h+4h} = \frac{h}{5h} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100},$$

ou seja, era igual a 20%.

(b) Após a chegada dos 5 casais, o número de homens passou a ser $h+5$ e o de mulheres passou a ser $m+5$. Portanto, o percentual de homens na festa passou a ser

$$\frac{h+5}{(h+5)+(m+5)} = \frac{h+5}{(h+5)+(4h+5)} = \frac{h+5}{5h+10}.$$

Como a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%, temos:

$$\begin{aligned}\frac{h+5}{5h+10} = \frac{26}{100} = \frac{13}{50} &\Longrightarrow 50(h+5) = 13(5h+10)\\ &\Longrightarrow 50h + 250 = 65h + 130\\ &\Longrightarrow 15h = 120 \Longrightarrow h = 8.\end{aligned}$$

Assim, antes da chegada dos cinco casais, estavam na festa 8 homens e 32 mulheres, uma vez que o número de mulheres era 4 vezes o número de homens. Portanto, depois da chegada dos cinco casais, havia $8+5 = 13$ homens e $32+5 = 37$ mulheres na festa.

□

Exemplo 15. *Calcule o ganho percentual real de um trabalhador que teve um aumento salarial de* 35% *depois de um ano com inflação de* 20%.

Solução. Para fixar as ideias, suponha que o salário do trabalhador era 5000 reais antes do aumento, e que esse valor comprasse 20 cestas básicas a um preço unitário de 250 reais.

Aplicando a correção de 35% ao salário e 20% ao preço da cesta básica, concluímos que o valor do novo salário será

$$5000 + \frac{35}{100} \cdot 5000 = 5000 + 1750 = 6750,$$

enquanto o novo preço da cesta básica será

$$250 + \frac{20}{100} \cdot 250 = 250 + 50 = 300.$$

Com os novos valores, o trabalhador pode comprar $6750 \div 300 = 22,5$ cestas básicas, ante as 20 que ele conseguia comprar antes das correções. Portanto, o ganho percentual real do trabalhador foi de

$$\frac{22,5-20}{20} = \frac{2,5}{20} = 0,125,$$

ou seja, $12,5\%$. □

Observe que, no exemplo anterior, o ganho real é menor que o valor *esperado* de $35\% - 20\% = 15\%$, o que é devido ao efeito inflacionário. Observe também que o artifício de utilizar um valor arbitrário para a cesta básica decorre do fato de que o *ganho salarial real* é medido em relação ao aumento do *poder de compra* do trabalhador. Assim, uma outra forma de resolver o exemplo anterior é observar que:

(i) após o *ganho nominal* de 35%, o salário passou a ser de 6750 reais;

(ii) o efeito dos 20% de inflação ao longo do ano elevou um gasto mensal de 5000 reais para um gasto mensal de

$$5000 + \frac{20}{100} \cdot 5000 = 6000 \text{ reais.}$$

Em palavras, o item (ii) diz que, ao final do ano, o salário do trabalhador deveria ser de 6000 reais, a fim de que seu poder de compra fosse o mesmo daquele dos 5000 reais no início do ano. Portanto, o ganho percentual real do trabalhador pode ser calculado como o quociente

$$\frac{6750 - 6000}{6000} = \frac{1}{8} = 12,5\%.$$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas três sessões de 50min para apresentar todo o conteúdo deste material. Recomendamos, ainda, que seja dada uma atenção especial aos problemas que tratam de aumentos e descontos percentuais sucessivos. Também é importante explicar com todo o cuidado os problemas que apresentam mais de uma ideia em sua solução, ou seja, aqueles que não têm uma solução imediata, a partir do conceito de porcentagem. Em particular, recomendamos que seja reservado um tempo maior para a explicacão dos problemas 11, 12, 13 e 14.

Sugestões de Leitura Complementar

1. G. Iezzi, S. Hazzan e D. M. Degenszajn. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 11*: Matemática Comercial, Matemática Financeira e Estatística Descritiva.* São Paulo, Atual Editora, 2004.