Material Teórico - Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 3

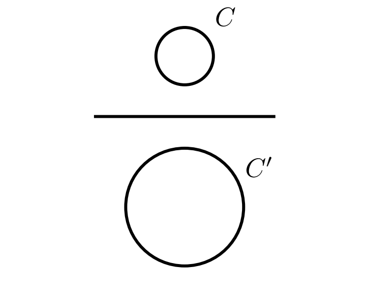
O Número π e o Comprimento do Círculo

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 O número π e o comprimento do círculo

Em geometria, o número π é definido como o quociente entre a circunferência (i.e., o comprimento) e o diâmetro de um círculo. De fato, desde a Grécia Antiga sabe-se que esse quociente independe do diâmetro do círculo, isto é, se aumentarmos (ou diminuirmos) o diâmetro de um círculo, então sua circunferência aumentará (ou diminuirá) na mesma proporção.



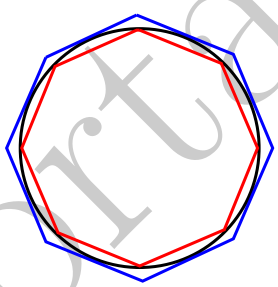
Em outras palavras, se dois círculos Λ[1] e Λ' têm diâmetros medindo d e d' e circunferências c e c', respectivamente, então

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} = \pi.$$

Assim, nas notações acima, temos

$$c = d\pi. \tag{1}$$

Arquimedes de Siracusa (278-212 a.c.) conseguiu estimar o valor de π aproximando o comprimento de um círculo de diâmetro 1 por perímetros de polígonos inscritos e circunscritos ao mesmo. Assim fazendo, Arquimedes obteve estimativas por falta e por excesso para π (veja uma ilustração desse processo na figura abaixo).



Mais precisamente, partindo de polígonos de 6 lados inscrito e circunscrito a um círculo de raio 1, Arquimedes dobrou o número de lados do polígono até obter um polígono com 96 lados. Calculando os perímeros correspondentes, ele obteve:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

[1] O símbolo Λ representa a letra grega maiúscula *lâmbda*.

ou, ainda,

$$3{,}140845 < \pi < 3{,}142857.$$

Embora desde muito tempo se saiba uma boa aproximação para π, somente em 1768 o matemático suíço Johann Heinrich Lambert provou que π é um número irracional, ou seja, que sua representação decimal é infinita e não periódica.

Nos exemplos seguintes, utilizaremos a aproximação

$$\pi \cong 3{,}14,$$

a qual será suficiente para nossos propósitos.

Exemplo 1. *Para realizar o teste físico em determinado concurso militar, os candidatos devem correr ao redor de uma praça circular cujo diâmetro mede* $110m$. *Quantos metros percorre, aproximadamente, um candidato que dá* 15 *voltas ao redor dessa praça?*

Solução. Uma vez que a praça tem formato circular com diâmetro igual a 110m, a relação (1) garante que, depois de uma volta, esse candidato terá percorrido

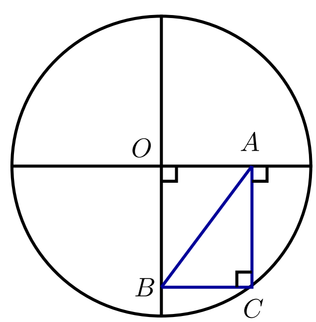
$$3{,}14 \cdot 110 = 345{,}4$$

metros. Portanto, depois de 15 voltas, o candidato terá percorrido um total de

$$15 \cdot 345{,}4 = 5.181\text{m}.$$

□

Exemplo 2. *Na figura abaixo,* $\overline{OA} = 3cm$ *e* $\overline{OB} = 4cm$. *Calcule o comprimento aproximado do círculo.*



Solução. Como o triângulo OAB é retângulo em O, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar a medida do lado AB. Com efeito,

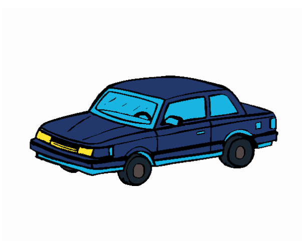
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 &\Longrightarrow \overline{AB}^2 = 3^2 + 4^2\\ &\Longrightarrow \overline{AB}^2 = 25\\ &\Longrightarrow \overline{AB} = 5.\end{aligned}$$

Mas, observe que OC e AB são diagonais de um mesmo retângulo. Portanto, temos $\overline{OC} = \overline{AB} = 5$ cm. Agora, como OC é raio do círculo, temos a circunferência do círculo é dada por

$$\pi \cdot d = \pi \cdot 2 \cdot \overline{OC} \cong 3{,}14 \cdot 10 = 31{,}4\text{cm}.$$

$\square$

Exemplo 3. *O raio das rodas de um automóvel é igual a* 30*cm. Que distância percorreu o automóvel depois que cada roda completou* 10.000 *voltas?*



Solução. Uma vez que o raio das rodas é igual a 30cm, a relação (1) garante que, depois de cada volta completada por elas, o automóvel terá percorrido, aproximadamente,

$$3{,}14 \cdot 2 \cdot 30 = 188{,}4\text{cm}.$$

Portanto, depois de 10.000 voltas, o automóvel terá percorrido, aproximadamente, um total de

$$10.000 \cdot 188{,}4 = 1.884.000\text{cm} = 18{,}84\text{km}.$$

$\square$

Exemplo 4. *Francisco utiliza uma bicicleta em seu trabalho, que é vigiar as casas de um bairro situado na periferia de Fortaleza. O diâmetro de cada pneu da bicicleta utilizada por Francisco mede* 50*cm. Na madrugada do último sábado, Francisco percorreu um total de* 16*km enquanto pedalava pelas ruas do bairro. Aproximadamente quantas voltas cada pneu da bicicleta completou, ao final do percurso?*

Solução. Observe que, após uma volta de qualquer pneu, a bicicleta percorre uma distância de $\pi \cdot d$, onde d é o diâmetro do pneu. Portanto, após uma volta, a bicicleta percorre

$$3{,}14 \cdot 50 = 157\text{cm}.$$

Daí, para calcularmos o número total de voltas que o pneu deu ao fim do percurso, basta dividir a distância total percorrida pela distância percorrida a cada volta. Devemos, antes de efetuar a divisão, transformar a distância total percorrida, que é dada em quilômetros, para centímetros. Como 16km$=$ 1.600.000cm, obtemos que o número de voltas dadas pelo pneu é:

$$1.600.000 \div 157 \cong 10.191.$$

$\square$

2 O comprimento de um arco de círculo

Considere um círculo qualquer Λ, de centro O e raio r, e o divida em 360 arcos iguais. Se os pontos A e B forem as extremidades de um desses 360 arcos, já sabemos que a medida de $\angle AOB$ é 1^o. Como um ângulo de 1^o corresponde a um arco que mede $\frac{1}{360}$ do comprimento total do círculo Λ, temos que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a

$$\frac{1}{360} \cdot 2\pi r.$$

Mais geralmente, se um arco qualquer $\overset{\frown}{CD}$ de Λ determina um ângulo central de medida $A\widehat{O}B = \alpha$, com α é dado em graus, então o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD}$ é dado por

$$\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r.$$

Por exemplo, se o ângulo central $\angle AOB$ determinado por um arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 45^o, então o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ será (veja a Figura 1):

$$\frac{45}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{4}.$$

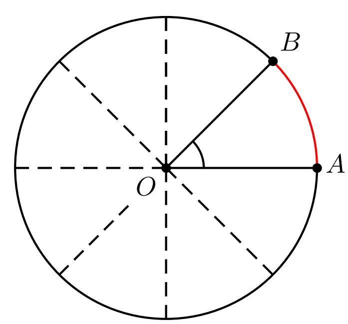


Figura 1: arco determinado por um ângulo de 45^o.

Se o ângulo $\angle AOB$ é reto, isto é, se sua medida é igual a 90^o (veja a Figura 2), então o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é

$$\frac{90}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{2}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado nos dois casos acima, se o ângulo $\angle AOB$ é *raso*, ou seja, $A\widehat{O}B = 180^o$, então o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a

$$\frac{180}{360} \cdot 2\pi r = \pi r,$$

que é a metade da circunferência de Λ (veja a Figura 4).

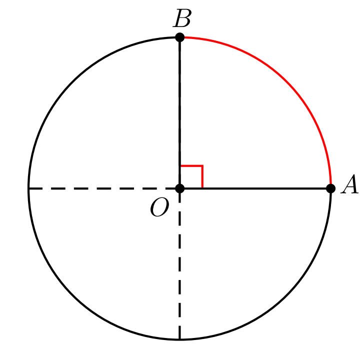


Figura 2: arco determinado por um ângulo reto.

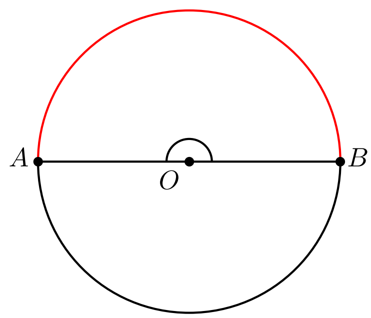


Figura 3: arco determinado por um ângulo raso.

Exemplo 5. *O relógio de uma torre possui o ponteiro dos minutos medindo 1 metro. Calcule a distância que a extremidade desse ponteiro percorre em 50 minutos.*

Solução. Como são necessários 60 minutos para que a extremidade do ponteiro percorra um círculo completo, temos que em 50 minutos essa extremidade terá percorrido uma fração que corresponde a $\frac{50}{60}$ da circunferência de um círculo de raio 1m, ou seja,

$$\frac{50}{60} \cdot 2\pi r = \frac{5\pi}{3} \cong 5{,}23\text{m}.$$

Um raciocínio alternativo é o seguinte: como, após 60 minutos, o ponteiro forma um ângulo de 360° com a posição inicial, temos que em um minuto ele forma um ângulo de $\frac{360}{60}^{\text{o}} = 6^{\text{o}}$ com a posição inicial. Portanto, depois de 50 minutos, o ângulo formado é de $50 \cdot 6 = 300^{\text{o}}$. Daí, o comprimento do arco percorrido pela extremidade do ponteiro, desde o momento inicial até passarem-se 50 minutos, é igual a:

$$\frac{300}{360} \cdot 2\pi r = \frac{5\pi}{3} \cong 5{,}23\text{m}.$$

□

3 Ângulos medidos em radianos

Recordamos que o radiano é uma medida para ângulos definida da seguinte forma: em um círculo qualquer, de raio r e centro O, considere um arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento é igual a r. Dizemos que a medida do ângulo $\angle AOB$ é igual a 1 rad (1 radiano). Assim, uma vez que o comprimento do círculo de raio r é $2\pi \cdot r$, concluímos que um ângulo de 360° corresponde a 2π rad. Portanto, um ângulo que mede 1 rad tem medida em graus igual a $\frac{360}{2\pi}$, o que corresponde a, aproximadamente, 57,296°.

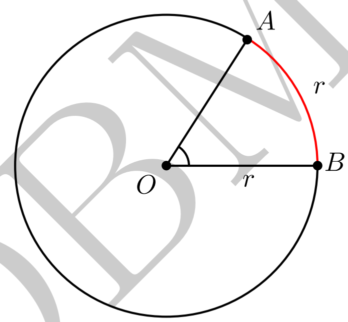


Figura 4: ângulo de medida 1 rad.

Desse modo, temos as seguintes correspondências entre alguns ângulos medidos em graus e em radianos:

$$30^{\text{o}} \longleftrightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad};$$
$$45^{\text{o}} \longleftrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ rad};$$
$$60^{\text{o}} \longleftrightarrow \frac{\pi}{3} \text{ rad};$$
$$90^{\text{o}} \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad};$$
$$180^{\text{o}} \longleftrightarrow \pi \text{ rad};$$
$$360^{\text{o}} \longleftrightarrow 2\pi \text{ rad}.$$

Deixamos a verificação das igualdades acima como exercício para o leitor.

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min cada para expor o conteúdo presente nesse material. Na Seção 1, saliente que o número π é irracional e, sendo assim, possui representação decimal infinita e não periódica. Desse modo, 3,14 é somente uma *aproximação* conveniente de seu valor real.

A referência [1] contém uma discussão mais rigorosa sobre o comprimento de um círculo e a noção de radiano, a qual é o pontapé inicial para o desenvolvimento da Trigonometria. A referência [2] contém vários problemas correlatos a esse conceito. Referências históricas relacionadas ao cálculo da circunferência de um círculo podem ser encontradas em [3].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª Ed. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana.* 9ª Ed. São Paulo, Atual Editora, 2013.

3. C. B. Boyer, U. C. Merzbach. *A History of Mathematics.* 3ª Ed. Hoboken, John Wiley & Sons, 2011.