Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 2

Congruência de Triângulos e Aplicações - Parte 1

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Congruência de triângulos

O principal objetivo desse material é definir a noção de **igualdade** de triângulos, bem como estabelecer critérios que permitam identificar quando dois triângulos são iguais. A ideia de igualdade de triângulos é formalizada através do conceito de **congruência**. Intuitivamente, dois triângulos são congruentes se podemos sobrepô-los utilizando *movimentos rígidos* no espaço, sem deformá-los. Mais precisamente, dizemos que o triângulo ABC é **congruente** ao triângulo $A'B'C'$ quando é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, tal que:

(i) os ângulos internos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;

(ii) os lados opostos a vértices correspondentes tenham comprimentos iguais.

Neste caso, escrevemos $ABC \equiv A'B'C'$.

A Figura 1 mostra dois triângulos congruentes ABC e $A'B'C'$, através da correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A',\ \ B \leftrightarrow B',\ \ C \leftrightarrow C'.$$

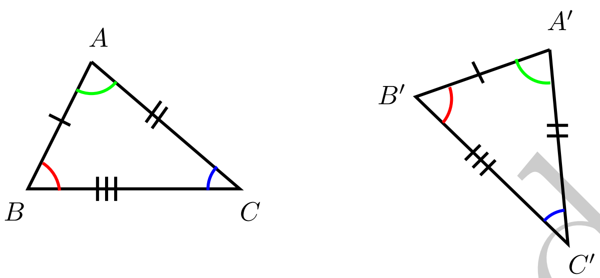


Figura 1: dois triângulos congruentes.

Assim, conforme os itens (i) e (ii) acima, temos

$$\widehat{A} = \widehat{A}',\ \ \widehat{B} = \widehat{B}',\ \ \widehat{C} = \widehat{C}'$$

e

$$BC = B'C',\ \ AC = A'C',\ \ AB = A'B'.$$

Listamos, abaixo, algumas propriedades da congruência de triângulos:

1. Reflexividade: qualquer triângulo ABC é congruente a si mesmo com a correspondência $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$ e $C \leftrightarrow C$.

2. Simetria: se ABC é congruente a $A'B'C'$ com a correspondência $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, então $A'B'C'$ é congruente a ABC com a correspondência $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$ e $C' \leftrightarrow C$. Ou seja, não há diferença entre afirmar que ABC é congruente a $A'B'C'$ ou que $A'B'C'$ é congruente a ABC. Assim, por vezes, dizemos simplesmente que *ABC e $A'B'C'$ são congruentes*.

3. Transitividade: se ABC é congruente a $A'B'C'$ e $A'B'C'$ é congruente a $A''B''C''$, com as respectivas correspondências $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ e $A' \leftrightarrow A''$, $B' \leftrightarrow B''$ e $C' \leftrightarrow C''$, então ABC é congruente a $A''B''C''$ com a correspondência $A \leftrightarrow A''$, $B \leftrightarrow B''$ e $C \leftrightarrow C''$.

Doravante, em prol da simplificação do discurso e sempre que não houver perigo de confusão, diremos que segmentos (resp. ângulos) que possuem um mesmo comprimento (resp. uma mesma medida) são *iguais*.

A seguir, enunciamos (sem demonstração) alguns conjuntos de critérios mínimos que permitem estabelecer a congruência de dois triângulos dados. Tais critérios são conhecidos como os **casos de congruência de triângulos**.

> **Caso LAL**: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois dos lados de um deles e o ângulo interno formado por esses dois lados sejam respectivamente iguais aos dois lados correspondentes no outro triângulo e ao ângulo formado por esses outros dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Na prática, o caso LAL reduz a necessidade de se verificar a igualdade dos três pares de lados e três pares de ângulos correspondentes nos dois triângulos a verificar apenas a igualdade de dois pares de lados e um par de ângulos.

Na Figura 2, temos $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$. Então, pelo caso LAL, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

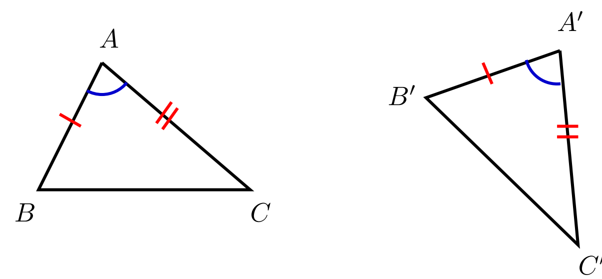


Figura 2: o caso de congruência LAL.

É intuitivo ver que, se podemos sobrepor os pares de lados AB, $A'B'$ e AC, $A'C'$, além dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ podem ser inteiramente sobrepostos. Observe, então, que a correspondência de vértices da congruência é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, o que fornece as igualdades adicionais $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e $BC = B'C'$.

Caso ALA: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que um dos lados de um deles e os ângulos adjacentes a esse lado sejam respectivamente iguais ao lado correspondente no outro triângulo e aos ângulos adjacentes a esse outro lado, então os dois triângulos são congruentes.

O caso ALA reduz a necessidade de se verificar a igualdade dos três pares de lados e três pares de ângulos correspondentes nos dois triângulos a verificar apenas a igualdade de um par de lados e dos dois pares de ângulos adjacentes a esses lados.

A figura 3 ilustra esse segundo caso de congruência. Nela, temos $AB = A'B'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, pelo caso ALA.

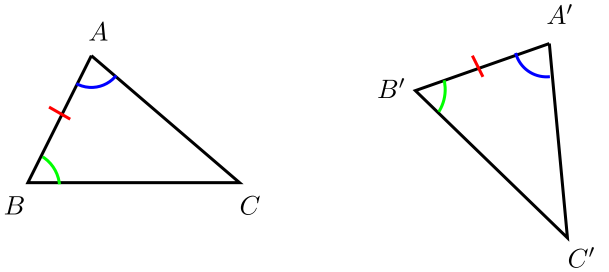


Figura 3: o caso de congruência ALA.

Observando ainda a Figura 3, é intuitivo que se conseguirmos sobrepor dois lados e os ângulos adjacentes a esses lados nos dois triângulos, então os triângulos podem ser inteiramente sobrepostos. Novamente aqui, a correspondência de vértices da congruência é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, fornecendo as igualdades adicionais $\widehat{C} = \widehat{C}'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$.

Caso LLL: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os três lados de um deles sejam respectivamente iguais aos lados correspondentes no outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Nas notações da Figura 4, temos $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$. Logo, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL. Aqui, uma vez mais, a correspondência de vértices da congruência é $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, e fornece as igualdades $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$ entre as medidas dos ângulos dos dois triângulos.

A seguir, ilustramos a aplicação de alguns dos casos de congruência listados acima, utilizando-os para obter alguns resultados importantes sobre triângulos isósceles e equiláteros.

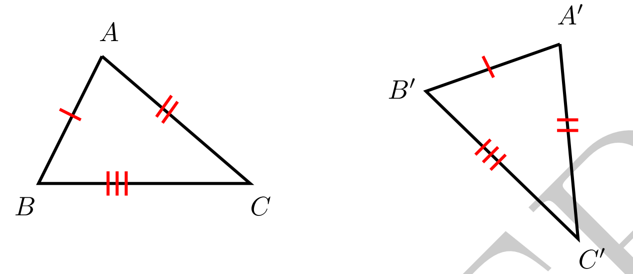


Figura 4: o caso de congruência LLL.

Proposição 1. *Se ABC é um triângulo isósceles com $AB = AC$, então $\widehat{B} = \widehat{C}$.*

Prova. Seja M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Em relação aos triângulos ABM e ACM, temos que $BM = CM$ (pois ambos são iguais a $\frac{1}{2} \cdot BC$), $AB = AC$ (por hipótese) e o lado AM é comum (veja a Figura 5). Portanto, esses dois triângulos são congruentes pelo caso de congruência LLL, com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A, \quad B \leftrightarrow C, \quad M \leftrightarrow M.$$

Em particular, segue daí que $\widehat{B} = \widehat{C}$. $\square$

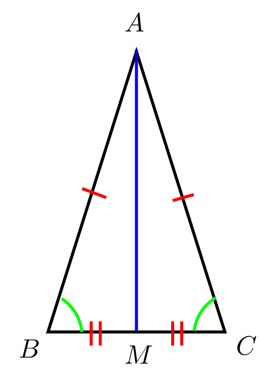


Figura 5: igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles.

O caso de congruência ALA nos garante que a recíproca da proposicão anterior também é válida:

Proposição 2. *Se dois dos ângulos de um triângulo são congruentes, então ele é isósceles.*

Prova. Seja ABC um triângulo tal que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Então, utilizando a correspondência

$$A \leftrightarrow A, \;\; B \leftrightarrow C, \;\; C \leftrightarrow B,$$

temos que ABC e ACB são triângulos conguentes, pelo caso ALA. Daí, segue que $AB = AC$. $\square$

Observação 3. *Não há nada estranho com o argumento apresentado na demonstração da proposição anterior. Visto em termos de movimentos rígidos, ele simplesmente garante que podemos mover ABC no espaço, sem deformá-lo (e até mantendo o vértice A fixo, se assim desejarmos), até que o vértice B coincida com o vértice C, e vice-versa. Sugerimos ao leitor parar por um momento e tentar visualizar mentalmente um tal movimento rígido.*

Quando o triângulo ABC é isósceles, com $AB = BC$, dizemos que o lado BC é a **base** de ABC. Os dois resultados discutidos acima nos dizem, então, que um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos internos adjacentes à base são iguais.

Como caso particular da discussão do parágrafo anterior, se ABC é um triângulo equilátero, podemos ver qualquer um dos lados AB, AC ou BC como base de ABC. Então, segue da Proposição 1 que $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. Na aula *Triângulos* do módulo *Elementos Básicos de Geometria Plana 2*, mostraremos que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$; admitindo a validade desse resultado, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 4. *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são iguais a* $60°$.

Para a próxima aplicação, dados dois pontos A e B no plano, definimos a **mediatriz** do segmento $\overline{AB}$ como sendo a reta perpendicular a $\overline{AB}$ e que passa pelo seu ponto médio.

Proposição 5. *Dados pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de A e B.*

Prova. Sejam M o ponto médio e m a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Se $p \in m$, então temos $PMA \equiv PMB$ pelo caso LAL, uma vez que PM é um lado comum, $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B = 90^o$ e $MA = MB = \frac{1}{2} \cdot AB$ (veja a Figura 6). Portanto, $PA = PB$, isto é, P é equidistante de A e B.

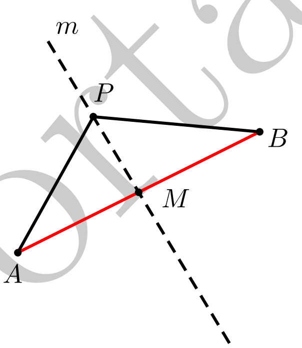


Figura 6: $P \in m \Rightarrow PA = PB$.

Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $PA = PB$. Dessa vez, temos que $PMA \equiv PMB$ utilizando o caso LLL, pois o lado PM é comum aos dois triângulos, $MA = MB = \frac{1}{2} \cdot AB$ e, por hipótese, $PA = PB$. Portanto, devemos ter $P\widehat{M}A = P\widehat{M}B$ (veja a figura 7). Mas, como a soma desses dois ângulos vale 180^o, segue que cada um deles mede 90^o, e concluímos que $P \in m$. $\square$

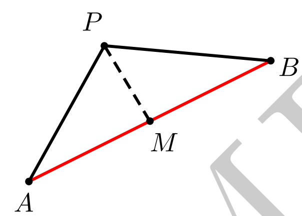


Figura 7: $PA = PB \Rightarrow P \in m$.

Com a proposição 5 em mãos, fica fácil construir a mediatriz de um segmento qualquer $\overline{AB}$ utilizando régua e compasso. Para isso, é suficiente localizarmos dois pontos no plano que são equidistantes de A e de B e traçarmos a reta que contém esses dois pontos. Para encontrar dois pontos equidistantes de A e de B, trace dois círculos de mesmo raio $r > \frac{1}{2}AB$, um com centro em A e outro com centro em B. Esses círculos se intersectarão em dois pontos, P e Q, digamos, de sorte que $PA = PB = r$ e $QA = QB = r$. Assim, a mediatriz de $\overline{AB}$ será a a reta $m = \overleftrightarrow{PQ}$ (veja a Figura 8).

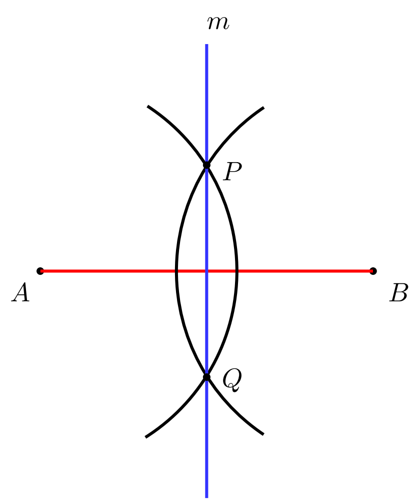


Figura 8: construção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

No que segue, apresentamos um quarto caso de congruência útil.

Caso ALAo: se há uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que um dos lados, um dos ângulos a ele adjacentes e o ângulo oposto a esse lado em um dos triângulos sejam respectivamente iguais, mediante tal correspondência, a um lado no outro triângulo, a um ângulo adjacente a esse lado e ao ângulo oposto a esse lado, então os dois triângulos são congruentes.

Nas notações da Figura 9, temos $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Logo, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso de congruência ALAo, mediante a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Portanto, obtemos as igualdades adicionais $AC = A'C'$,

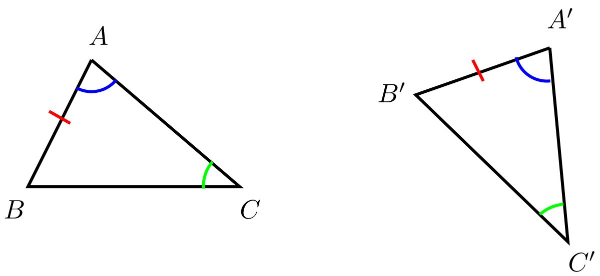


Figura 9: o caso ALAo.

$BC = B'C'$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

É instrutivo observar que a validade do caso de congruência ALAo decorre imediatamente da validade do caso ALA, juntamente com o fato de que a soma dos ângulos de todo triângulo é igual a 180°.

Para entender porque, suponhamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ satisfaçam um conjunto de condições do tipo ALAo, digamos, $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Então,

$$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180° - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = \widehat{B}',$$

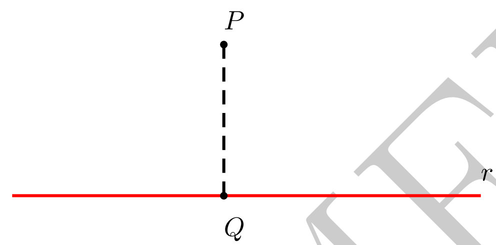
de forma que os dois triângulos também satisfazem o conjunto ALA de condições $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $AB = A'B'$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

Assim, o leitor deve perceber o caso ALAo como um *atalho*, que permite concluir a congruência de dois triângulos que verifiquem hipóteses LAAo sem a necessidade de, antes, operar um argumento como o do parágrafo anterior para poder utilizar o caso ALA.

Apresentamos, por fim, um último caso de congruência de triângulos, específico para triângulos retângulos.

Caso CH: se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos de um deles são respectivamente congruentes à hipotenusa e um dos catetos do outro, então os dois triângulos são congruentes.

Para o próximo exemplo precisamos da seguinte definição: sejam P e r, respectivamente, um ponto e uma reta no plano. Definimos a **distância** de P a r como sendo a medida do segmento de reta $\overline{PQ}$, em que Q é o pé da perpendicular à reta r traçada a partir de P. Denotaremos a distância de P a r por $d(P, r)$.



Proposição 6. *Seja $\angle AOB$ um ângulo no plano e b a sua bissetriz. Então*

$$P \in b \Longleftrightarrow d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB}).$$

Prova. Se $P \in b$, sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares às semirretas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$, passando por P (veja a Figura 10). Note que

$$M\widehat{O}P = N\widehat{O}P = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{O}B$$

e

$$O\widehat{M}P = O\widehat{N}P = 90^{\circ}.$$

Veja também que o segmento de reta OP é lado comum aos triângulos OPM e OPN. Pelo caso LAAo, temos $OPM \equiv OPN$, e daí obtemos $PM = PN$, ou seja, $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$.

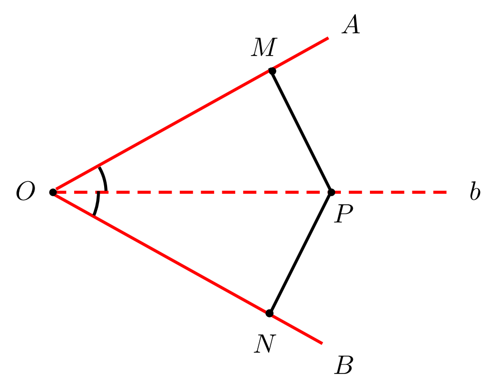


Figura 10: $P \in b \Longleftrightarrow d(P, OA) = d(P, OB)$.

Reciprocamente, se P é um ponto no plano tal que $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$, então, observando mais uma vez a Figura 10, nossa hipótese agora é $PM = PN$. Assim, os triângulos OPM e OPN são retângulos (em M e N, respectivamente), possuem a mesma hipotenusa OP e catetos iguais PM e PN. Portanto, pelo caso CH para triângulos retângulos, temos que $OPM \equiv OPN$. Daí, obtemos, $A\widehat{O}P = B\widehat{O}P = \frac{1}{2} \cdot A\widehat{O}P$, ou seja, a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

$\square$

Observação 7. *Ainda em relação aos casos de congruência apresentados aqui, observamos para o leitor interessado que o capítulo* [2] *da referência* [1] *discute construções com régua e compasso que servem de argumentos heurísticos para explicar porque tais conjuntos de critérios realmente estabelecem a "igualdade" de dois triângulos que os satisfaçam. Por outro lado, na referência* [2] *o caso LAL é assumido como axioma de congruência de triângulos, sendo mostrado rigorosamente que os casos ALA e LLL decorrem dele como teoremas. Ambas as referências* [1] *e* [2] *trazem várias aplicações adicionais do conceito de congruência de triângulos.*

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas três sessões de 50min para discutir todo o conteúdo desse material. Ressalte que os critérios de congruência de triângulos são dispositivos que permitem concluir a congruência de dois triângulos sem que haja a necessidade de verificar se, nos dois triângulos, todos os lados e os ângulos correspondentes a esses lados são congruentes. Chame a atenção também para os resultados que versam sobre a congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles e a congruência dos três ângulos internos de um triângulo equilátero, pois eles serão úteis nos próximos módulos. Procure estimular o uso da régua e do compasso, para que os alunos se familiarizem com tais objetos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.