Aluno: ______________________________________________

Professora: Fabiana Rodrigues

**Exercício 1 (Questão 16 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005):**

Partindo do mesmo ponto, Ana e Beatriz começam, ao mesmo tempo, uma corrida de bicicleta de ida e volta entre duas cidades distantes 150 km uma da outra. Ana e Beatriz mantêm velocidades constantes e Beatriz percorre, a cada hora, 10 km a mais que Ana. Beatriz completa o percurso de ida e inicia o de volta. Elas se cruzam no momento em que Beatriz completa 30 km no percurso de volta. Qual é a velocidade de Ana?

Se $v$ é a velocidade de Ana, então a velocidade desenvolvida por Beatriz é $v+10$. No momento em que as duas se cruzam, a distância percorrida por Ana é $150-30=120$ km e a percorrida por Beatriz é $150+30=180$ km. Como $tempo=\frac{distância}{velocidade}$ e o tempo gasto pelas duas até o momento do encontro é o mesmo, então $\frac{120}{v}=\frac{180}{v+10}$, ou seja, $120(v+10)=180v$. Resolvendo essa equação linear para $v$, obtém-se $v=20$ km/h.

**Exercício 2 (Questão 1 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):**

Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos?

Seja $x$ o número de caras consecutivas obtidas após os primeiros 2014 lançamentos. Então, de acordo com o enunciado do problema, $x$ deverá satisfazer a igualdade $997+x=\frac{2014+x}{2}$, ou seja, $1994+2x=2014+x$. Resolvendo essa equação, obtém-se $x=20$.

**Exercício 3 (Questão 2 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009):**

Para achar o número de seu sapato, Maurício mediu o comprimento de seu pé em centímetros, multiplicou a medida por 5, somou 28, dividiu tudo por 4 e arredondou o resultado para cima, obtendo o número 40. Qual das alternativas mostra um possível comprimento do pé do Maurício?

a) 24cm
b) 25cm
c) 26 cm
d) 27cm
e) 28 cm

Seja $x$ o comprimento do pé do Maurício. Então, $39<\frac{5x+28}{4}\leq 40$, e segue que $156<5x+28\leq 160$. Logo, $128<5x\leq 132$, ou seja, $25{,}6<x\leq 26{,}4$. A única alternativa que satisfaz essas desigualdades é a alternativa C.

**Exercício 4 (Questão 7 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2015):**

A soma de dois números é 3 e a soma de seus cubos é 25. Qual é a soma de seus quadrados?

Sejam $x$ e $y$ os dois números. Vamos usar as conhecidas identidades do quadrado da soma $(x+y)^2$ e do cubo da soma $(x+y)^3$ para encontrar uma identidade para a soma dos quadrados $x^2+y^2$: $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ e $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Do quadrado da soma podemos concluir que $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ e do cubo da soma podemos concluir que $3x^2y+3xy^2 = (x+y)^3 - (x^3+y^3)$. Evidenciando o produto $3xy$ no lado esquerdo da última identidade, obtemos $3xy(x+y) = (x+y)^3 - (x^3+y^3)$ e, isolando o produto $xy$ (não há problema em dividir por $x+y$, pois $x+y=3$), temos $xy = \frac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{3(x+y)}$. Substituindo esse produto na identidade da soma dos quadrados temos $x^2+y^2 = (x+y)^2 - \frac{2}{3}\frac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{x+y}$. Agora, como $x+y=3$ e $x^3+y^3=25$, então $x^2+y^2 = 3^2 - \frac{2}{3}\frac{3^3-25}{3} = \frac{77}{9}$.