# Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

## A Noção de Razão e Exercícios

### Sétimo Ano do Ensino Fundamental

**Prof. Francisco Bruno Holanda**
**Prof. Antonio Caminha Muniz Neto**

# 1 Introdução

Neste módulo, aprederemos uma forma de expressar a ideia de razão entre duas grandezas. Por exemplo, quando dizemos que a razão do número de vitórias pelo número de derrotas de um determinado time de basquete é de $2:3$ (leia 2 para 3), estamos dizendo (por definição) que, se montarmos uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador igual ao número de derrotas, então esta fração será **equivalente** à fração $\frac{2}{3}$.

Como uma possibilidade, suponha que o número de vitórias seja igual a 18 e o de derrotas igual a 27. Então, se construirmos a fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador é igual ao número de derrotas, teremos:

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \frac{2}{3}.$$

Por outro lado, observe que se um segundo time tiver a mesma razão entre os números de vitórias e derrotas, isso não necessariamente significa que os dois times possuam a mesma quantidade de vitórias. De fato, se este segundo time possua 36 vitórias e 54 derrotas, teremos novamente

$$\frac{26}{54} = \frac{2 \cdot \cancel{18}}{3 \cdot \cancel{18}} = \frac{2}{3}.$$

Os exemplos acima chamam atenção para o que talvez seja o fato principal sobre razões: **uma razão é uma medida *relativa*, e não *absoluta***.

Utilizemos esse conceito para resolver nosso primeiro exercício:

**Exercício 1.** *O dono de uma revenda de veículos tem um total de 77 automóveis. A razão entre veículos novos e usados é de $4:3$. Quantos são os carros novos?*

**Solução.** Primeiramente, faremos uma tabela com algumas das possibilidades cuja razão entre veículos novos e usados seja $4:3$:

| Novos | Usados | Total |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 |
| 8 | 6 | 14 |
| 12 | 9 | 21 |
| ... | ... | ... |
| $4x$ | $3x$ | 77 |

Utilizando o padrão da tabela, quando o total de carros for 77, devemos ter $4x + 3x = 77$, de forma que $7x = 77$ ou, o que é o mesmo, $x = 11$. Portanto, teremos $x = 44$ carros novos. □

Uma outra forma de resolvermos o exercício anterior é utilizando um sistema de equações com duas incógnitas. Veja a seguir:

**Solução.** Considere que a loja possua $x$ carros novos e $y$ carros usados. Como o total de veículos é 77, temos $x + y = 77$, de forma que $y = 77 - x$. Por outro lado, a razão entre novos e usados é $4:3$. Portanto,

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x}{77 - x} = \frac{4}{3}.$$

Resolvendo a última equação multiplicando em cruz, temos que

$$3x = 4(77 - x) \Rightarrow 3x = 308 - 4x$$

$$7x = 308 \Rightarrow x = 44.$$

Logo, temos 44 carros novos. □

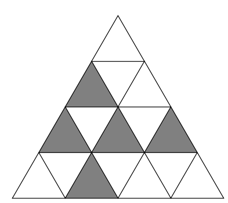
Razões também transmitem a ideia de *proporcionalidade direta*. Por exemplo, se em uma sala a razão de meninos para meninas é de 5 para 6 e cada menino está segurando um cartão vermelho e cada menina está segurando um cartão azul, então a razão entre cartões vermelhos e azuis também será de 5 para 6.

Mais geralmente, o mesmo sucede se cada menino estiver segurando $y$ cartões vermelhos e cada menina estiver segurando $y$ cartões azuis. De fato, sendo respectivamente $5x$ e $6x$ os números de meninos e de meninas, teremos $5x \cdot y = 5xy$ cartões vermelhos e $6x \cdot y = 6xy$ cartões azuis, de forma que a razão entre as quantidades de cartões vermelhos e azuis será

$$\frac{5\cancel{xy}}{6\cancel{xy}} = \frac{5}{6}.$$

O exemplo a seguir explora essa ideia.

**Exercício 2.** *A figura a seguir mostra um triângulo de área 1200, dividido em vários triângulos iguais. Qual é a razão entre a área total da região cinza e a área total da região branca?*



**Solução.** Veja que o triângulo maior está dividido em 16 triângulos iguais. Destes, 5 são cinzas e 11 são brancos. Como todos possuem a mesma área, a razão pedida é simplemente $\frac{5}{11}$.

**Exercício 3.** *Em um grupo de intercâmbio, a razão entre brasileiros e estrangeiros era de $3:4$. Se cada brasileiro possuía duas canetas e um caderno e cada estrangeiro possuía uma caneta e dois cadernos, calcule a razão entre os números de canetas e cadernos.*

**Solução.** Suponha que existam $x$ brasileiros e $y$ estrangeiros. Pela razão mencionada no enunciado, devemos ter

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot y.$$

Também pelo enunciado, o número de canetas deve ser igual a $2x + y$ e o número de cadernos deve ser igual a $x + 2y$. Substituindo $x$ por $\frac{3y}{4}$ nessas duas expressões, obtemos:

- $2x + y = 2 \cdot \frac{3y}{4} + y = \frac{5y}{2}$ canetas.
- $x + 2y = \frac{3y}{4} + 2y = \frac{11y}{4}$ cadernos.

Dividindo um valor pelo outro, encontramos:

$$\frac{\frac{5y}{2}}{\frac{11y}{4}} = \frac{5\cancel{y}}{2} \cdot \frac{4}{11\cancel{y}} = \frac{10}{11}.$$

Portanto, a razão entre canetas e cadernos é 10 : 11. □

## 2 Razões no dia-a-dia

Em nosso cotidiano, é fácil deparar-mo-nos com medidas que refletem o conceito de razão. Um dos exemplos mais comuns é a velocidade. Quando dizemos que um carro está andando a uma velocidade constante de $40km/h$, isso significa que ele percorrerá $40km$ em uma hora, $80km$ em duas horas ou $20km$ em meia hora, se mantiver essa velocidade sem parar.

Por outro lado, você deve ter percebido que, mesmo que em um certo momento um carro esteja a uma velocidade de $40km/h$, ele poderá demorar até mais de uma hora para percorrer trajetos mais curtos do que $40km$ quando estiver trafegando na cidade. Isso ocorre nesse caso porque a velocidade de $40km/h$ não será constante. De outra forma, o carro poderá passar algum tempo parado nos semáforos, ou mesmo ficar ”preso”em um engarrafamento. Todas essas situações diminuem a **velocidade média** do automóvel, que é definida como a distância total pecorrida dividida pelo tempo total gasto para percorrê-la. Portanto, a velocidade média nada mais é do que uma razão.

**Exercício 4.** *A distância entre a casa de Pedro até uma feira cultural é de $15km$. Seu pai levou-o até lá de carro, gastando 45 minutos. Pergunta-se:*

*(a) Qual foi a velocidade média da viagem, em quilômetros por hora?*

*(b) Mantida essa mesma velocidade média por $1h30m$, que distância o pai de Pedro percorrerá?*

**Solução.** Para responder o item (a), observe que 45 minutos correspondem a $\frac{3}{4}$ de hora. Daí, para obter a velocidade média, basta calcular a fração:

$$\frac{15km}{\frac{3}{4}h} = 15 \cdot \frac{4}{3}km/h = 20km/h.$$

Quanto a (b), como a velocidade média é a razão entre a distância $d$ percorrida (em quilômetros) e o tempo de percurso (em horas), e $1h30m = \frac{3}{2}h$, nesse caso devemos ter

$$\frac{d}{3/2} = 20,$$

de modo que $d = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30km$. □

Ainda em relação ao exercício acima, note que mesmo que o pai de Pedro tenha dirigido a uma velocidade superior em alguns momentos, possíveis congestionamentos e tempo parado nos semáforos dimunuíram a velocidade média do veículo.

Outro razão de presença cotidiana e que merece nossa atenção é o conceito de *densidade* de um objeto, que é definida pelo quociente entre a massa dese objeto e seu volume. Escrevemos, portanto,

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}.$$

Considere, por exemplo, a Tabela 1, a qual mostra a densidade da água em diversas temperaturas[1]:

| **Temperatura** ($°C$) | **Densidade** ($kg/m^3$) |
|---|---|
| 100 | 958,4 |
| 80 | 971,8 |
| 60 | 983,2 |
| 40 | 992,2 |
| 30 | 995,6502 |
| 25 | 997,0479 |
| 22 | 997,7735 |
| 20 | 998,2071 |
| 15 | 999,1026 |
| 10 | 999,7026 |
| 4 | 999,972 |
| 0 | 999,8395 |

Tabela 1: densidade da água x temperatura.

De acordo com a tabela, quando a água está a uma temperatura de $40°C$, temos que $992,2$ quilogramas desse líquido ocupam um volume de 1 metro cúbico. Por outro lado, uma vez que densidade nada mais é do que uma razão, em um volume de água de 3 metros cúbicos e à temperatura de $60°C$, teremos (novamente pela tabela) uma massa $m$ de água (em quilogramas) tal que

$$\frac{m}{3} = 983,2.$$

Assim, $m = 3 \cdot 983,2 = 2949,6kg$.

Observe que, quando temos dois objetos com densidades diferentes em um mesmo ambiente e pelo menos um deles está no estado líquido ou gasoso, a diferença entre as densidades pode ser facilmente observada, pois o objeto de

[1] Fonte: Wikipédia.

menor densidade tenderá a estar *acima* do objeto de maior densidade. É este fenômeno que explica por que os balões de ar quente sobem quando as chamas são acionadas: isto ocorre devido à menor densidade do ar quente em relação ao ar frio. É também por esse motivo que os aparelhos de ar condicionado devem ser instalados nas partes superiores das paredes, pois o ar frio (mais denso) tende a descer, enquanto o ar quente (menos denso) tende a subir.

Outro exemplo prático de comparação entre densidades (e, portanto, entre razões), mas que funciona de forma contrária à esperada, é a relação entre o gelo e água. Quando a água congela, ela passa a ter uma densidade *menor* (a explicação para esse fenômeno reside na *estrutura cristalina* do gelo, mas não vem ao caso aqui). Realmente, de acordo com a Tabela 1, a densidade da água a $4°C$ é de $999,97km/m^3$, ao passo que a $0°C$ é de $999,83km/m^3$. É por isso que o gelo flutua sobre a água.

**Exercício 5.** *Um grupo de alunos, supervisionados por um professor, encheram completamente um tanque de $1m^3$ de volume com água a $80°C$. Então, eles esperaram a água esfriar até atingir a temperatura ambiente. Em seguida, verificaram que a água havia "perdido" aproximadamente 2% de seu volume. Qual era, aproximadamente, a temperatura ambiente? Use a Tabela 1 para obter a resposta e ignore perdas de água por evaporação.*

**Solução.** Inicialmente, como a água estava a 80 graus e o tanque estava completamente cheio, pela tabela podemos assegurar que a massa de água era de 971,8 quilogramas. Por outro lado, após a água ter esfriado, o tanque estará com um volume de água 2% menor, ou seja, teremos um volume de $0,98m^3$ de água. Portanto, a densidade deve ser igual a

$$\frac{971,8}{0,98} = 991,63.$$

Examinando a Tabela 1, esse valor corresponde a uma temperatura de aproximadamente $40°C$. □

**Observação:** é curioso notar que o exercício que acabamos de resolver trás o princípio básico de funcionamento do termômetro de mercúrio. O mercúrio é um metal que, à temperatura ambiente, é líquido; por outro lado, assim como a água, ele também muda sua densidade de acordo com a temperatura. Em um termômetro, essa mudança de densidade com a temperatura, de uma massa fixa de mercúrio encerrada em uma fina coluna, faz com que a altura da coluna de mercúrio varie ao longo de uma escala graduada, exatamente como vemos ao medir a temperatura de alguém que está com febre.

## 3 Exercícios propostos

Finalizamos esta aula resolvendo alguns exercícios que ajudarão a fixar o conteúdo aprendido. É importante que o aluno dedique algum tempo pensando por conta própria antes de ler cada solução.

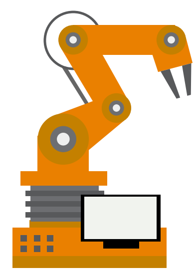
**Exercício 6.** *Um caminhão pode levar 300 sacos de cimento ou 7290 tijolos. Se o veículo já foi carregado com 100 sacos de cimento, quantos tijolos ainda poderemos colocar?*

**Solução.** Observe que 300 sacos de cimento correspondem à capacidade total do caminhão. Assim, quando este é carregado com 100 sacos, $\frac{1}{3}$ de sua capacidade terá sido utilizada, restando ainda $\frac{2}{3}$. Agora, veja que

$$\frac{2}{3} \cdot 7290 = 4860.$$

Portanto, ainda podem ser colocados 4860 tijolos. □

**Exercício 7.** *Uma máquina A é capaz de fabricar 1200 peças de computador em três horas. Uma máquina B faz o mesmo trabalho em quatro horas. Se as duas trabalharem juntas, em quanto tempo as peças estarão prontas?*



**Solução.** Em uma hora, a primeira máquina fabrica $\frac{1}{3}$ das peças, ao passo que a segunda fabrica $\frac{1}{4}$ das peças. Juntas, podem fazer $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ do trabalho em uma hora. Restará, então, $1-\frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ do serviço para a próxima hora, que não será totalmente utilizada (uma vez que $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$). Agora, como a razão entre $\frac{5}{12}$ e $\frac{7}{12}$ é

$$\frac{5}{12} \div \frac{7}{12} = \frac{5}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{12}}{7} = \frac{5}{7},$$

e $\frac{7}{12}$ do serviço é executado conjuntamente pelas máquinas em 1 hora, concluímos que $\frac{5}{12}$ do serviço será executado conjuntamente pelas máquinas em $\frac{5}{7}$ de uma hora, o que corresponde, aproximadamente, a

$$\frac{5}{7} \cdot 60 = \frac{300}{7} \cong 43$$

minutos. Portanto, trabalhando juntas as máquinas completarão o serviço em aproximadamente 1 hora e 43 minutos. □

**Exercício 8.** *Trabalhando juntos, Alvo e Eva pintam uma casa em três dias; Eva e Ivo pintam a mesma casa em quatro dias e Alvo e Ivo pintam-na em seis dias. Se os três trabalharem juntos, em quanto tempo eles pintarão a mesma casa? Considere que, em todas as situações descritas, a jornada diária de trabalho seja de 6 horas.*

Antes de passarmos à solução *correta*, examinemos um argumento *incorreto* mas bastante frequente: escrevendo $A$ para Alvo, $E$ para Eva e $I$ para Ivo, temos

$$\begin{cases} A+E=3 \\ E+I=4 \\ A+I=6 \end{cases}$$

Somando ordenadamente as equações acima, chegamos a:

$$2(A+E+I)=13 \Rightarrow A+E+I=6,5.$$

Porém, observe que essa resposta não faz sentindo, dentre outras razões porque não é razoável que as três pessoas, trabalhando juntas, levem mais tempo para finalizar o serviço do que apenas duas delas.

**Solução.** Para solucionar o problema corretamente, devemos considerar as *frações* do serviço que cada dupla consegue fazer em um dia. Utilizando as mesmas notações que acima, temos então:

$$\begin{cases} A+E=\frac{1}{3} \\ E+I=\frac{1}{4} \\ A+I=\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos:

$$2(A+E+I)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4},$$

de sorte que

$$A+E+I=\frac{3}{8}.$$

Portanto, em um dia, os três juntos realizarão $\frac{3}{8}$ do trabalho. Logo, em dois dias será realizado $\frac{6}{8}$ do trabalho, restando $\frac{2}{8}$ do serviço para o terceiro dia.

Agora, raciocinemos como no exercício anterior, observando que $\frac{2}{8}$ do trabalho representam $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{8}$ do trabalho (em outras palavras, a razão entre $\frac{2}{8}$ e $\frac{3}{8}$ é $\frac{2}{8}\div\frac{3}{8}=\frac{2}{8}\cdot\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$). Assim, como os três juntos levam 6 horas para completar $\frac{3}{8}$ do serviço, para realizar os $\frac{2}{8}$ restantes serão necessárias $\frac{2}{3}$ das 6 horas, ou seja, $\frac{2}{3}\cdot 6=4$ horas.

Portanto, com os três trabalhando juntos, o serviço será concluído em dois dias e quatro horas. □

Vejamos, agora, um problema que não está *bem posto.*

**Exercício 9.** *Em uma escola, a razão entre as quantidades de meninos e meninas em uma sala do sexto ano é de* $4:5$, *sendo de* $5:4$ *para alunos de uma sala do sétimo ano. Caso a diretora resolva juntar essas duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?*

**Solução.** Poderíamos pensar da seguinte forma: na primeira sala, para cada quatro meninos existem cinco meninas; por outro lado, na segunda sala, para cada quatro meninas existem cinco meninos. Logo, ao juntarmos as duas salas, a razão ficaria de $1:1$, uma vez que para cada menino existiria uma menina.

Observe que, na "solução" acima, estamos assumindo *implicitamente* que ambas as salas têm um mesmo total de alunos. Se tal condição não for satisfeita, então não é possível calcular a razão entre meninos e meninos quando as duas salas forem juntas. Por exemplo se a sala do sexto ano tiver 18 alunos e a do sétimo ano tiver 36 alunos, então teremos 8 meninos e 10 meninas no sexto ano, mas 20 meninos e 16 meninas no sétimo ano (verifique tais afirmações); por sua vez, tais quantidades darão $8+20=28$ meninos e $10+16=26$ meninas ao juntarmos as duas salas, o que daria a razão $28:26=14:13$. É, agora, fácil perceber que, modificando-se as quantidades de alunos em ambas as salas, tal razão poderia facilmente mudar.

A seguir, propomos o exercício com enunciado correto.

**Exercício 10.** *Em uma escola, a razão entre as quantidades de meninos e meninas em uma sala do sexto ano é de* $4:5$, *sendo de* $5:4$ *para alunos de uma sala do sétimo ano. Sabendo que essas duas turmas possuem uma mesma quantidade de alunos, pergunta-se: caso a diretora resolva juntar estas duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?*

**Solução.** Veja a solução dada acima. □

**Exercício 11** (OBM 2010)**.** *Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido* $\frac{3}{4}$ *da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?*

**Solução.** Como as duas garotas encontram-se na terceira de quatro partes iguais da escada, podemos deduzir que Ana é três vezes mais rápida do que Beatriz. Portanto, quando Ana terminar de descer, ela terá percorrido a última quarta parte da escada, enquanto Beatriz terá percorrido um terço de um quarto da escada. Logo, Beatriz terá subido, ao todo,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Faltará, pois, Beatriz subir $\frac{2}{3}$ da escada. □

## 4 Sugestões ao professor

Parte da teoria e dos exercícios presentes neste material também foram abordados no módulo de frações do sexto ano. Acreditamos que a revisão deste conteúdo seja fundamental para que os alunos fixem bem o conteúdo – principalmente para aqueles com maior dificuldade.

Por outro lado, as partes teóricas que tratam sobre velocidade média, densidade e as soluções que envolvem equações de primeiro grau são novidades. A grande vantagem desses novos conteúdos é a possibilidade de relacionar razões a situações práticas. À título de ilustração, o professor pode elencar um conjunto de líquidos e pedir para que os alunos os ordenem de acordo com suas densidades, levando em consideração suas experiências cotidianas. Por exemplo, ele pode questionar a turma sobre qual líquido tem menor densidade à temperatura ambiente: a água ou o óleo; o óleo ou o álcool; e assim por diante (eventuais dúvidas podem ser dirimidas consultando-se livros ou a Internet). Uma vez que os líquidos estejam ordenados de acordo com suas densidades, o professor pode, então, pedir que os alunos comparem as massas de 2 metros cúbicos de cada um dos líquidos envolvidos, o que os fará resgatar o conceito de densidade como razão.

Recomendamos que o professor separe três encontros de 50 minutos cada para apresentar este material. No primeiro, elabore a introdução e resolva alguns exercícios simples. No segundo, aborde os temas sobre velociade média e densidade. No terceiro, resolva mais exercícios para fixar bem o conteúdo. Caso queira separar um quarto encontro para apresentar mais aplicações sobre densidade e velocidade média, acreditamos que seja um excelente opção.