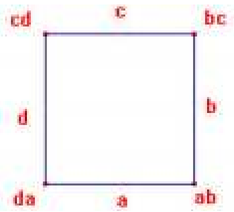
Tarefa de casa 1 (Prova OBMEP 2006 – 2ª Fase – N3 – Questão 5)

a) Severina escreveu um número inteiro positivo em cada lado de um quadrado. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nos lados que se encontram nesse vértice. A soma dos números escritos em dois lados opostos é 60 e a soma dos números escritos nos outros lados é 85. Qual é a soma dos números escritos nos vértices?

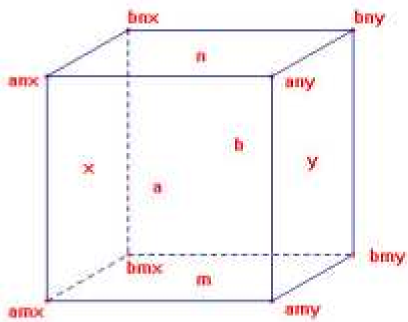
b) Catarina, por sua vez, escreveu em cada face de um cubo um número inteiro positivo. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nas três faces que se encontram nesse vértice. Se a soma dos números escritos nos vértices é 105, qual é a soma dos números escritos nas faces?

a) *1ª solução*: Sejam a, b, c e d os números escritos nos lados do quadrado, como na figura. Os números associados aos vértices são, portanto, ab, bc, cd e da, e sua soma é $ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d) = 85 \cdot 60 = 5100$.



2ª solução: Sejam a e b dois lados adjacentes do quadrado e $60 - a$ e $85 - b$ os outros dois. Então, a soma dos produtos dos comprimentos dos lados adjacentes é $ab + b(60 - a) + (60 - a)(85 - b) + (85 - b)a = 5100$.

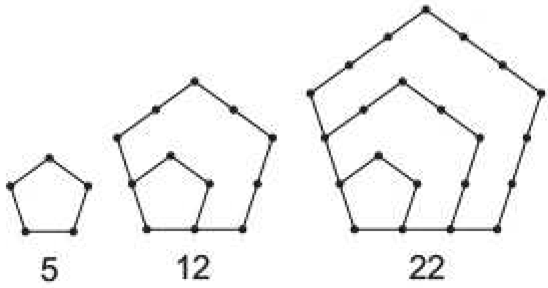
b) Sejam (a, b), (m, n) e (s, y) os pares de números escritos em faces opostas do cubo, como na figura. Os números associados aos vértices são, portanto, amx, anx, amy, any, bmx, bnx, bmy e bny, e sua soma é $105 = amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny = a(mx + nx + my + ny) + b(mx + nx + my + ny) = (a + b)(mx + nx + my + ny) = (a + b)[(m + n)x + (m + n)y] = (a + b)(m + n)(x + y)$. Como 105 se fatora em números primos como $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ e os números $a + b$, $m + n$ e $x + y$ são inteiros maiores do que 1, então $a + b$, $m + n$ e $x + y$ devem ser iguais a 3, 5 e 7 (em qualquer ordem). Logo, $a + b + x + y + m + n = 3 + 5 + 7 = 15$.



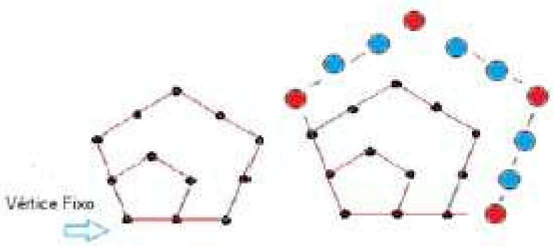
Na figura, os números a e b estão escritos, respectivamente, na frente e atrás do cubo, os números m e n embaixo e em cima, e os números x e y à esquerda e à direita.

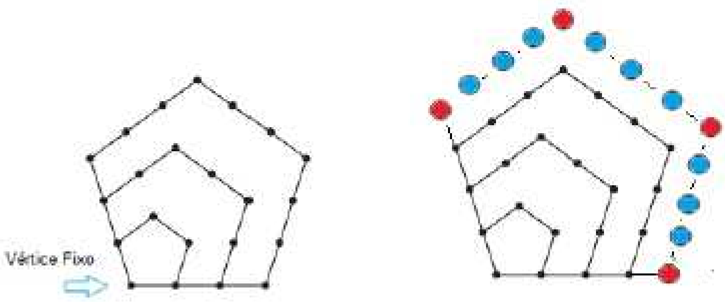
<u>Tarefa de casa 2</u> (Questão 14 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2015)

Abaixo temos 3 figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?



Os números de pontos de cada figura formam uma sequência chamada de *números pentagonais*.

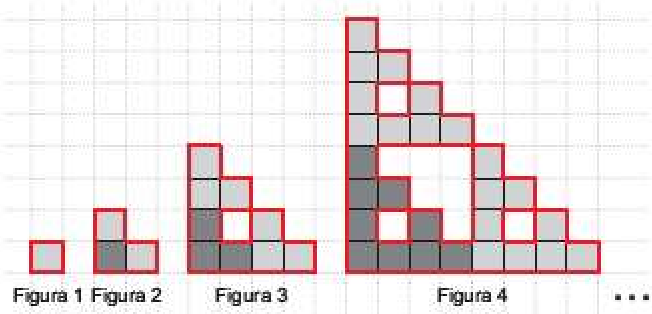




O número de pontos a_n a serem acrescentados na figura pentagonal n forma uma progressão aritmética. A cada nova figura pentagonal acrescentam-se 3 pontos a mais que na figura pentagonal anterior. Na figura pentagonal 2 acrescentam-se $a_2 = 4 + 3$ pontos, na figura pentagonal 3 acrescentam-se $a_3 = 4 + 3 \times 2$ novos pontos, na figura pentagonal 4 acrescentam-se $a_4 = 4 + 3 \times 3$ novos pontos (ver figura). Assim na figura pentagonal n acrescentam-se $a_n = 4 + 3 \times (n - 1) = 3n + 1$ novos pontos. Dessa forma $a_{21} = 3 \times 21 + 1 = 64$ e como a vigésima figura pentagonal possui 651 pontos, a vigésima primeira figura pentagonal terá $651 + 64 = 715$ pontos.

<u>Tarefa de casa 3</u> (Questão 8 – Prova OBMEP – 1ª Fase – Nível 3 – 2014 – Modificado)

Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. De quantos quadrados de 1 cm de lado está composta a figura 6?



Cada figura é formada de 3 cópias da figura anterior. Em consequência, o número de quadrados em cada figura forma uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = 3$. Logo, o número de quadrados na figura 6 é $a_6 = 3^6 = 729$.