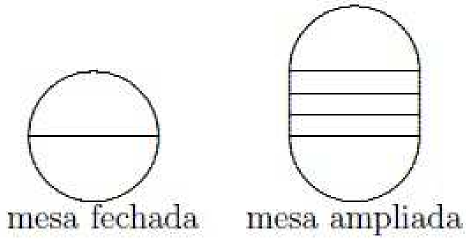
Exercício 1 (Questão 86 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Um arco de circunferência mede $300°$ e o seu comprimento é de 2 km. Qual é o número inteiro mais próximo da medida do raio do círculo, em metros?

Se o raio é r, então o comprimento de um arco de $300°$ é $\frac{2\pi}{360}300r = \frac{5\pi}{3}r = 2000$ m. Portanto, $r = 2000 \cdot \frac{3}{5\pi} \approx 382{,}17$ m. O número inteiro mais próximo é 382.

Exercício 2 (Questão 133 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Uma mesa redonda tem $1{,}40$ metros de diâmetro. Para uma festa, a mesa é ampliada colocando-se três tábuas de 40 cm de largura cada uma, como mostra a figura. Se cada pessoa à mesa deve dispor de um espaço de 60 cm, quantos convidados poderão se sentar?



O perímetro da mesa ampliada é

$$144 \times \pi + 40 \times 6 \approx 140 \times 3{,}14 + 240 = 679{,}70\ cm.$$

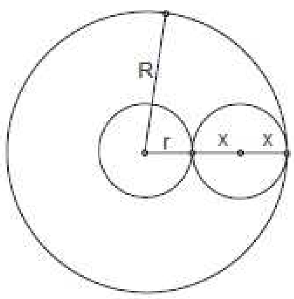
Se cada convidado precisa de 60 cm de espaço, poderão sentar à mesa, no máximo,

$$\frac{679{,}97}{60} = 11{,}3,$$

Ou seja, 11 convidados.

Exercício 3 (Questão 5 item (a) – Lista 4 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2009):
Na figura estão desenhadas duas circunferências concêntricas de raios r e R, com $r < R$, e 12 circunferências, de raio x, compreendidas entre essas duas. Além disso, as 14 circunferências são disjuntas ou tangentes. Mostre que $x = \frac{R-r}{2}$.

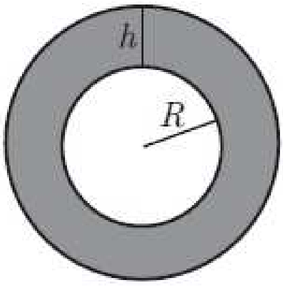
Na figura estão desenhadas as duas circunferências concêntricas, de raios r e R, e uma circunferência de raio x simultaneamente tangentes a essas duas. Logo, temos $r + 2x = R$, donde $x = \frac{R-r}{2}$.



Exercício 4 (Questão 197 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
O raio do globo terrestre mede, aproximadamente, 6378 km no Equador. Suponhamos que um fio esteja ajustado exatamente sobre o Equador. Em seguida, suponhamos que o comprimento do fio seja aumentado em 1 metro, de modo que o fio e o Equador fiquem como círculos concêntricos ao redor da terra. Um homem em pé, uma formiga ou um elefante são capazes de passar por baixo desse fio?

Mostremos que a resposta é independente do raio da esfera em que a experiência for realizada. Seja R o raio da terra. O comprimento inicial do fio é $2\pi R$, ao adicionar 1 metro, ficamos com um fio de comprimento $2\pi R + 1$, que corresponde ao perímetro de uma nova circunferência de raio $R + h$, onde h é a altura da "folga" entre as duas circunferências. Como o perímetro do círculo de raio $R + h$ é $2\pi(R + h)$, obtemos a igualdade $2\pi R + 1 = 2\pi(R + h)$, que simplificada, fornece

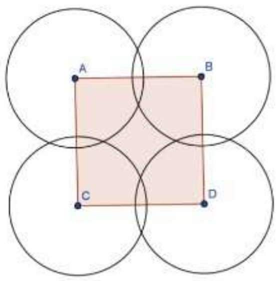
$$h = \frac{1}{2\pi} = 0{,}16.$$



Portanto, independentemente do valor de R, a altura da folga obtida com 1 m a mais de fio é, sempre, de aproximadamente 16 cm. Em particular, somente uma formiga é capaz de passar por baixo do fio.

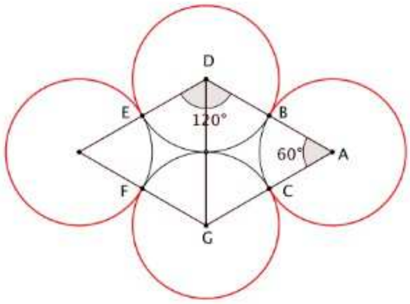
Exercício 5 (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2014):
Quatro circunferências de mesmo raio estão dispostas como na figura, determinando doze pequenos arcos, todos de comprimento 3. Qual é o comprimento de cada uma dessas circunferências?

Devido às simetrias presentes na figura, podemos construir um quadrado $ABCD$, com vértices A, B, C e D situados nos centros de cada uma das circunferências, conforme mostrado na figura. Observamos que cada circunferência, os dois lados do quadrado que saem do centro dela determinam um arco cujo comprimento é $\frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{2} = 6$, sendo essa a medida da quarta parte do comprimento de cada círculo. Logo, o comprimento de cada círculo é 24.



Exercício 6 (Questão 6 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013):
A figura mostra quatro circunferências, todas de comprimento 1 e tangentes nos pontos indicados. Qual é a soma dos comprimentos dos arcos destacados em vermelho?

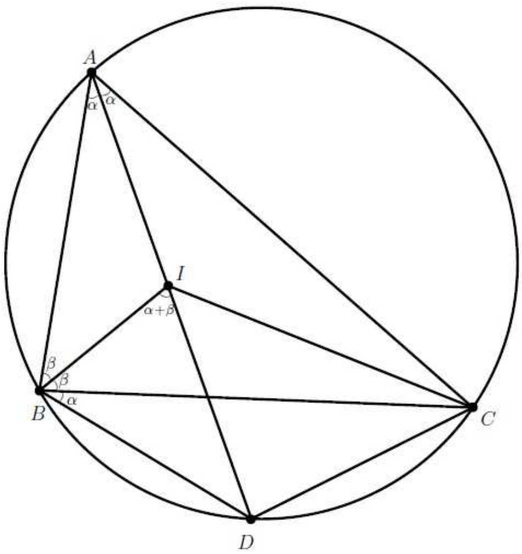
Seja r o raio comum das circunferências. Unindo os centros A, D e G de três circunferências, como na figura abaixo, e lembrando que a reta que passas pelos centros de duas circunferências tangentes passa também pelo ponto de tangencia, vemos que o triângulo ADG é equilátero, pois todos seus lados medem $2r$.



Logo, todos seus ângulos medem $60°$; em particular, o ângulo central $\angle BAC$ mede $60°$. Segue que o arco preto $\widehat{BC}$ corresponde ao ângulo central de $60° = \frac{1}{6} \times 360°$, ou seja, esse arco mede $\frac{1}{6}$ do comprimento da circunferência, que é $\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$; esse também é o comprimento do arco preto $\widehat{EF}$. Já o arco preto $\widehat{BE}$ corresponde a um ângulo central de $120°$; seu comprimento é então duas vezes o de um arco correspondente a $60°$; ou seja, é $2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, que é também o comprimento do arco preto $\widehat{CF}$. Desse modo, o comprimento total dos arcos pretos é $2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$; como a soma dos comprimentos das circunferências é 4, o comprimento dos arcos vermelhos é $4 - 1 = 3$.

Exercício 7 (Questão 27 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2014):
Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência abaixo. Sejam também I o incentro do triângulo ABC e D o ponto onde a reta AI corta a circunferência. Mostre que $DB = DC = DI$.

Como I é o encentro do triângulo ABC, então os segmentos AI, BI e CI são bissetrizes dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$. Sejam então $\alpha = \angle BAI = \angle CAI$ e $\beta = \angle ABI = \angle CBI$.



Como o ângulo $\angle BID$ é ângulo externo do triângulo ABI, temos que

$$\angle BID = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \beta.$$

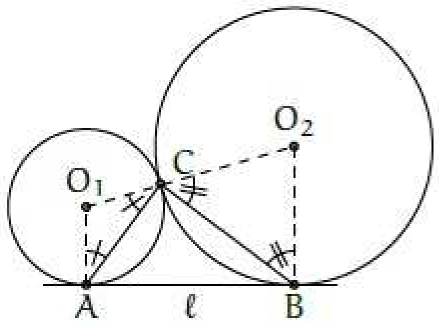
Por outro lado, o ângulo $\angle DBC$ está "olhando para o arco $\widehat{DC}$", logo é igual ao ângulo $\angle CAI = \alpha$. Portanto, vale que

$$\angle IBD = \angle IBC + CBD = \beta + \alpha.$$

Assim, segue que $\angle IBD = \angle BID$. Portanto o triângulo IBD é isósceles, o que implica que $DB = DI$. Analogamente, se prova que $DC = DI$.

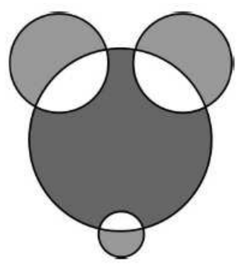
Exercício 8 (Questão 103 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2011):
As circunferências C_1 e C_2 são tangentes à reta l nos pontos A e B e tangentes entre si no ponto C. Prove que o triângulo ABC é retângulo.

Como as circunferências são tangentes, então o ponto de tangencia C e os centros O_1 e O_2 pertencem a uma mesma reta. Além disso, como as circunferências são tangentes a l, então O_1A e O_2B são perpendiculares a l e, portanto, paralelas.



Seja α a medida do ângulo $\angle O_1CA$ e β a medida do ângulo $\angle O_2CB$. Como os triângulos AO_1C e BO_2C são isósceles, segue que $\angle CAO_1 = \alpha$ e $\angle CBO_2 = \beta$.
Como as retas O_1A e O_2B são paralelas, temos $\angle AO_1C + \angle BO_2C = 180°$, donde $180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$. Portanto $\alpha + \beta = 90°$. Assim, $\angle ACB = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.

Exercício 9 (Questão 59 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Seja v a soma das áreas das regiões pertencentes unicamente aos três discos pequenos na figura (em cinza claro) e seja w a área da região interior pertencente unicamente ao maior disco (em cinza escuro). Os diâmetros dos círculos são 6, 4, 4 e 2. Calcule o quociente $\frac{v}{w}$.



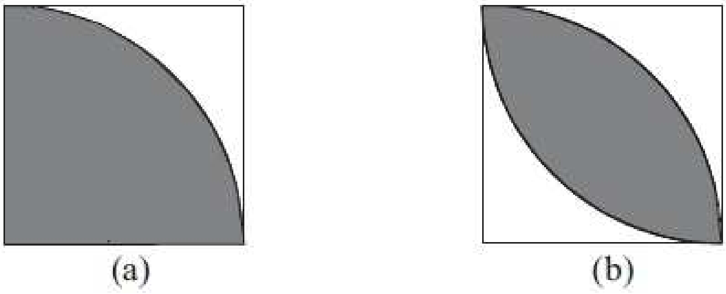
Os raios dos três discos menores são 1, 2 e 2 e o do disco maior é 3. Denotemos por b a área em branco. Então $v = 1^2 \cdot \pi + 2^2 \cdot \pi + 2^2 \cdot \pi - b = 9\pi - b$ e $w = 3^2 \cdot \pi - b = 9\pi - b$. Assim, $\frac{v}{w} = 1$.

Exercício 10 (Questão 75 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Se um arco de $60°$ num círculo I tem o mesmo comprimento que um arco de $45°$ num círculo II, encontre a razão entre a área do círculo I e a área do círculo II.

Denotemos por r e R os raios dos círculos I e II, respectivamente. No círculo I, o comprimento do arco de $60°$ é igual a $\frac{1}{6}$ de seu comprimento, ou seja $\frac{2\pi r}{6}$. Analogamente, no círculo II, o comprimento do arco de $45°$ é igual a $\frac{1}{8}$ de seu comprimento, ou seja $\frac{2\pi R}{8}$. Logo, $\frac{2\pi r}{6} = \frac{2\pi R}{8}$, ou seja $\frac{r}{R} = \frac{3}{4}$. Finalmente, temos

$$\frac{\text{área do círculo I}}{\text{área do círculo II}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Exercício 11 (Questão 146 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Em cada uma das figuras a seguir tem-se um quadrado de lado r. As regiões hachuradas e cada uma destas figuras são limitadas por lados desse quadrado ou por arcos de círculo de raio r. De centros nos vértices do quadrado. Calcule cada uma dessas áreas em função de r.



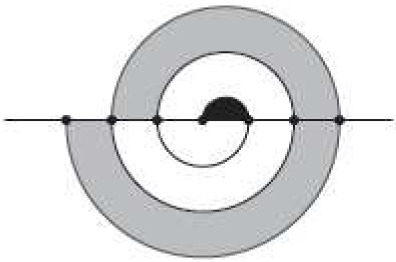
a) A área hachurada corresponde a um quarto da área de um círculo de raio r, portanto a área hachurada é igual a $\frac{1}{4}\pi r^2$.
b) Observe que a área da região marcada com X, que não está hachurada na figura (a), é igual à área do quadrado todo, diminuída da área da região hachurada, ou seja,

$$\text{área da região marcada com } X = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2.$$

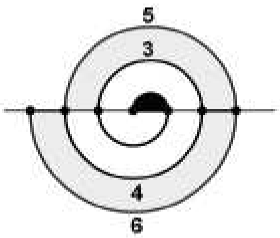
Voltando ao item (b), a área da região hachurada na figura (b) é igual à área do quadrado todo, menos duas vezes a área da região marcada com X, ou seja, é igual a

$$\text{área da região hachurada} = r^2 - 2\left(r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2\right) = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2.$$

Exercício 12 (Questão 10 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2010):
Na figura abaixo os pontos destacados sobre a reta estão igualmente espaçados. Os arcos que ligam esses pontos são semicircunferências e a região preta tem área igual a 1. Qual é a área da região cinza?



Na figura escrevemos, ao longo das semicircunferências, quantas vezes seu diâmetro é maior que o diâmetro da semicircunferência de área 1.



Como a proporção entre as áreas de duas figuras planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de proporcionalidade, segue que as áreas das semicircunferências rotuladas com 3, 5, 4 e 6 são, respectivamente, 9, 25, 16 e 36. Logo, a região cinza tem área $(36 - 16) + (25 - 9) = 36$.